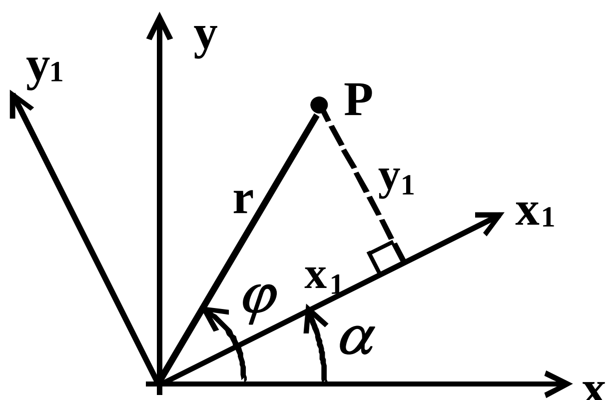
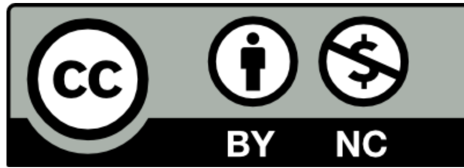
ALGEBRA II

Antti Majaniemi



2016

ISBN 978-952-93-8167-8



Antti Majaniemen perikunta on päättänyt antaa tämän teoksen käytettäväksi yllä olevalla lisenssillä. Painatus ei ollut enää kannattavaa alhaisen kysynnän vuoksi, mutta tällä tavalla oppimateriaali on edelleen opiskelijoiden ja oppilaitosten käytettävissä.

Tämä teos on ladattavissa osoitteessa http://anttimajaniemi.fi

Turussa 20.11.2016

Jari Majaniemi

jari @ anttimajaniemi.fi

Sisällys

Tämä moniste on jatkoa monisteelle Algebra I ja se on tarkoitettu käytettäväksi ensisijaisesti ammattikorkeakouluissa insinööriopintojen ensimmäisenä lukuvuonna. Eri luvuissa olevien asioiden käsittelyjärjestys ja käsittelyn laajuus riippuvat opintosuunnasta ja jäävät opettajan harkittaviksi.

Kiitokset työtovereilleni, joilta olen saanut arvokasta tukea näiden algebran monisteiden tekemisessä. Erityisesti haluan kiittää tässä yhteydessä fil. lis. Ritva Metsänkylää.

Tähän "toiseen painokseen" olen tehnyt muutaman aika pienen korjauksen.

Turussa 27. 4. 1999

Antti Majaniemi

Kolmas, päivitetty painos. Olen päivittänyt Antti Majaniemen alkuperäiseen monisteeseen esimerkkejä ja harjoitustehtäviä tämän päivän tilanteeseen paremmin sopiviksi.

Turussa 23. 2. 2007 Jari Majaniemi

1 Kolmannen ja korkeamman asteen yhtälöt

1.1 Yhtälön juuret ja polynomin tekijät

Pyrkimyksenä on määrittää reaalikertoimisen yhtälön

(1) $$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (n \geq 3)$$

reaalijuuret (joskus kompleksijuuret). Tämä tehtävä on läheisessä yhteydessä polynomin

(2) $$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

tekijöihin jakamisen kanssa.

Esim. 1 Joskus yhtälöä vastaavaa polynomi pystytään jakamaan tekijöihin ryhmittelemällä termejä sopivasti:

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = 0 \quad \Big| \text{ ryhmitellään vp. termejä}$$
$$x^2(x+2) + 3(x+2) = 0$$
$$(x^2+3)(x+2) = 0 \quad \Big| \textit{ tulon nollasääntö}$$
$$x^2 + 3 = 0 \ \text{ tai } \ x + 2 = 0$$
$$x = -2 \quad (\text{tai } x = \pm\sqrt{3}\, i)$$

Lause 1 *Jos a on yhtälön (1) jokin juuri, niin vastaava polynomi p(x) on jaollinen $(x-a)$:lla.*

**Todistus:* Oletetaan, että a on yhtälön (1) eli yhtälön $p(x) = 0$ juuri. Tällöin a toteuttaa tämän yhtälön, ts. $p(a) = 0$.

Ajatellaan suoritetuksi jako $p(x):(x-a)$, jolloin saadaan eräs osamäärä $q(x)$ ja jakojäännös r. (Jakojäännös on alempaa astetta kuin jakaja $x-a$, joten siinä ei esiinny x:ää.) Näytetään, että jakojäännös on = 0 eli jako menee tasan. Koska *jaettava = jakaja·osamäärä + jakojäännös*, niin

$$p(x) = (x-a) \cdot q(x) + r\,.$$

Kun tähän yhtälöön sijoitetaan x:lle arvo a, saadaan yhtälö

$$\underbrace{p(a)}_{=0} = \underbrace{(a-a)}_{=0} \cdot q(a) + r \quad \therefore \quad r = 0\,.$$

Täten $p(x) = (x - a) \cdot q(x)$ eli $p(x)$ on jaollinen $(x - a)$:lla.

Esim. 2 Ratkaise yhtälö $x^3 - 7x + 6 = 0$.

Kokeilemalla toteat, että luvuista 1, –1, 2, –2, ... jo ensimmäinen $x = 1$ toteuttaa yhtälön. Siten lauseen 1 mukaan polynomi $x^3 - 7x + 6$ on jaollinen $(x - 1)$:llä. Kun suoritat jaon jakokulmassa, saat toiseksi tekijäksi (osamääräksi) $x^2 + x - 6$. Näin alkuperäinen yhtälö muuttuu muotoon

$$(x-1)(x^2 + x - 6) = 0.$$

Tämä hajoaa tulon nollasäännön avulla kahteen osaan:

$$x - 1 = 0 \text{ tai } x^2 + x - 6 = 0,$$

mistä saat alkuperäiselle yhtälölle kaksi lisäjuurta $x = 2$ ja $x = -3$ (ratkaisemalla 2. asteen yhtälön).

Esimerkissä 2 yhtälö oli 3. astetta. Kun juurta $x = 1$ vastaava tekijä $x - 1$ jaettiin pois, jäljelle jäi toisen asteen yhtälö. Yleisesti: *Jos yhtälölle (1) löydetään jollakin menetelmällä yksi juuri ja vastaava tekijä jaetaan pois, niin jäljelle jää astetta alempi yhtälö.* Yhden juuren löytämisessä voi auttaa seuraava tulos (jota ei todisteta):

Lause 2 *Jos yhtälön*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

kertoimet ovat kokonaislukuja ja jos yhtälöllä sattuu olemaan kokonais- tai murtolukuratkaisu p/q (supistettu muoto), niin p on vakiotermin a_0 tekijä ja q on a_n:n positiivinen tekijä.

Esim. 3 Tutkitaan aluksi, onko yhtälöllä

$$2x^3 + x^2 + 7x - 4 = 0$$

jokin rationaalijuuri *p*/*q*. Lauseen 2 mukaan *p*:ksi kannattaa kokeilla vain 4:n tekijöitä ja *q*:ksi 2:n positiivisia tekijöitä.

Luvun 4 kaikki mahdolliset tekijät ovat $\pm 1, \pm 2$ ja ± 4 ja luvun 2 positiiviset tekijät ovat 1 ja 2. Näistä saadaan kahdeksan erisuurta *p*/*q*-arvoa: $p/q = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 1/2$. Kokeilemalla todetaan, että näistä viimeistä edellinen arvo $x = 1/2$ toteuttaa yhtälön, joten yhtälön vp:lla oleva polynomi hajoaa tekijöihin seuraavasti (huomaa kerroin **2**):

$$2x^3 + x^2 + 7x - 4 = \mathbf{2} \cdot (x - 1/2) \cdot (x^2 + ...)$$

$$= (2x - 1) \cdot (x^2 + ...)$$

| jälk. tekijän löydät, kun suoritat jaon (jakokulmassa)

$$= (2x - 1) \cdot (x^2 + x + 4).$$

Yhtälöllä $x^2 + x + 4 = 0$ ei ole reaalijuuria (diskr. < 0), joten alkuperäisen yhtälön ainoa reaalijuuri on $x = 1/2$.

1.2 Yhtälön ratkaiseminen likiarvomenetelmillä

*Esimerkiksi yhtälöllä $x^3 - 2x - 5 = 0$ ei ole rationaalijuuria, sillä Lauseen 2 mukaan ainoat mahdolliset rationaalijuuret $p/q = \pm 1, \pm 5$ eivät toteuta yhtälöä. Siten *tämän yhtälön ratkaiseminen ei onnistu edellisen esimerkin tapaisesti*.

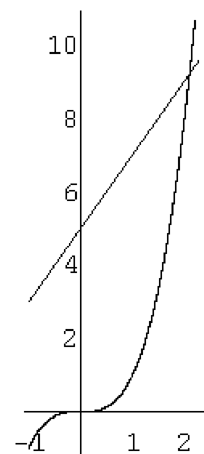
Kolmannen ja neljännen asteen yhtälöille olisivat olemassa tarkat ratkaisukaavat, mutta ne ovat käytöltään niin mutkikkaat, että yleensä tyydytään ratkaisemisessa likiarvomenetelmiin. Samoin esimerkiksi yhtälöiden

$$\sin 2x + x - 1 = 0 \ \ ([x] = rad), \quad \ln x - x + 2 = 0, \quad e^x = x + 2$$

ratkaisemisessa joudutaan turvautumaan likiarvomenetelmiin, koska samassa yhtälössä on polynomifunktio ja sitä korkeampi "transsendenttifunktio".

Seuraavassa esitettävän kolmen menetelmän lisäksi myöhemmin esitetään derivointiin perustuva Newtonin menetelmä (tangenttimenetelmä).

1 **Graafinen menetelmä.** Sitä käytetään 1) *juuren suuruusluokan* ja 2) *juurien lukumäärän* määrittämiseen.



Esim. 4 $x^3 - 2x - 5 = 0$ (ei rat. juuria p/q)

1. tapa: Piirretään käyrä $y = x^3 - 2x - 5$ ja katsotaan, missä kohdissa se leikkaa x-akselin.

2. tapa (yleensä parempi): Kirjoitetaan yhtälö ensin muotoon

$$x^3 = 2x + 5.$$

Piirretään sitten kuutioparaabeli $y = x^3$ ja suora $y = 2x + 5$ (vrt. edellinen kuva). Ne leikkaavat toisensa kohdassa $x \approx 2{,}1$. On siis vain tämä yksi x:n arvo, joka antaa kummallekin käyrälle saman y:n arvon, ts. tekee lausekkeet x^3 ja $2x + 5$ yhtä suuriksi eli toteuttaa alkuperäisen yhtälön.

2 Haarukointi:

Esim. 4 $x^3 - 2x - 5 = 0$. Esim. graafisesti juurelle on saatu likiarvo $x \approx 2{,}1$. Tarkennetaan likiarvoa ***haarukoimalla***:

x	$x^3 - 2x - 5$
2	–1 < 0
2,2	1,248 > 0
2,1	0,061 > 0
2,08	–0,161 < 0
2,09	–0,050 < 0
2,095	0,005 > 0
2,094	–0,006 < 0
2,0945	–0,0006 < 0

Erimerkkiset, joten funktiolla $y = x^3 - 2x - 5$ on 0-kohta välillä 2 ...2,2.

Nyt tiedetään, että 0-kohta on välillä 2 .... 2,1 ja aika lähellä 2,1:tä. Valitaan 2,08 seuraavaksi x:n arvoksi jne.

Tässä vaiheessa tiedetään, että $2{,}090 < x < 2{,}095$, joten $x \approx 2{,}09$

$\therefore\ 2{,}0945 < x < 2{,}095 \quad \therefore\ \underline{\underline{x \approx 2{,}095}}$.

3 Iterointi (toistaminen):

Esim. 5 $x^3 - 2x - 5 = 0$. Lähtökohtana on esim. graafisesti saatu ainoan juuren likiarvo $x_1 \approx 2$ (tai $x_1 \approx 2{,}1$). *Ratkaistaan yhtälöstä "yksi x erilleen"*, esim.

$$x^3 = 2x + 5 \ \therefore\ \underline{\underline{x = \sqrt[3]{2x+5}}}.$$

Pyritään löytämään sellainen x:n arvo, että se tekee tämän muunnetun yhtälön vp:n ja op:n yhtä suuriksi. Sitä varten sijoitetaan lähtöarvo x_1 yhtälön oikeaan puoleen. Saadaan uusi likiarvo x_2 jne., siis

$x = \sqrt[3]{2x+5}$, $x_1 = 2$, $x_2 = \sqrt[3]{2x_1+5} = \sqrt[3]{9} = 2{,}080....$

$x_3 = \sqrt[3]{2x_2+5} = 2{,}0923...$, $x_4 = 2{,}09421...$, $x_5 = 2{,}09450...$

$x_6 = 2{,}09454...$, $x_7 = 2{,}09455...$ jne.

Tästä voidaan jo aika varmasti päätellä, että $x \approx 2{,}0946$, koska peräkkäiset likiarvot alkavat neljän desimaalin tarkkuudella olla samat ja koko ajan hieman kasvavat (joten 4. desimaali 5 korottuu 6:ksi).

Harjoituksia

A

1.1 Ratkaise a) $x^3 + 6x^2 - 16x = 0$, b) $2x^3 + x^2 - 4x - 2 = 0$ (ryhmittele termejä), c) $x^3 - 4x^2 - 9x + 6 = 0$. *Mitkä ovat c)-kohdassa juuren arvot, joita kannattaa kokeilla (Lause 2)?

1.2 Supista $\dfrac{x^2 - x - 6}{x^3 + 2x^2 + x + 2}$ (Vihje: nimittäjään kannattaa kokeilla vain osoittajan 0-kohtia)

1.3 Ratkaise a) graafisesti, b) haarukoimalla, c) iteroimalla (3 desimaalin tarkkuudella) yhtälö $x^3 - x - 1 = 0$.

B

1.4 Määritä yhtälön $x^4 - x^2 - 12 = 0$ kaikki neljä ratkaisua kompleksilukualueella. Yhtälö on ns. *bikvadraattinen* eli x^2:lle toista astetta oleva yhtälö.

1.5 Määritä yhtälön $x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 12 = 0$ reaalijuuret (koska x^4:n kerroin on = 1, kannattaa kokeilla vain vakiotermin 12 tekijöitä Lauseen 2 mukaan).

1.6 Ratkaise yhtälö $(2x^2 + 1)(2 - \frac{1}{x}) = 8x^2 - 2$ (tarkat juuren arvot).

1.7 Supista lauseke $\dfrac{2x^3 + 4x^2 + x + 2}{2x^2 + 3x - 2}$.

1.8 Ratkaise a) haarukoimalla, b) iteroimalla (3 desimaalin tarkkuus; ensin karkea likiarvo graafisesti sinikäyrän ja suoran leikkauksena) yhtälö (huom: *laskin RAD-näytölle!*) $\sin x - x + 1 = 0$

1.9 Etsi yhtälön $\sin 2x - 2x + 3 = 0$ juurelle likiarvo graafisesti ja tarkenna tulosta haarukoimalla (6 askelta). Välivaiheet näkyviin. Muista vaihtaa laskin *RAD*-moodiin.

1.10 Näytä, että yhtälöllä $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 9x + 6 = 0$ ei ole muita reaalijuuria kuin 1 ja 2. (Vihje: tarvitset vain yhden jaon, jos jaat polynomin vastaavien tekijöiden tulolla).

1.11 Määritä seuraavilla kahdella tavalla sellaiset a:n arvot, että polynomi $2x^3 + ax^2 + 2a^2x + 2$ tulee jaolliseksi ($x + 1$):llä.

1. tapa: Suorita jako jakokulmassa ja merkitse jakojäännös 0:ksi.

2. tapa: Käytä tietoa, että $x = -1$ toteuttaa vastaavan yhtälön.

C

1.12 Seuraava (lujuusopissa esiin tullut) tehtävä johtaa trigonometriseen yhtälöön, jonka ratkaiseminen vaatii likiarvomenetelmiä (haarukointi tms.). Eräässä ympyränsektorissa kaari b on 20 % jännettä k pidempi. Laske keskuskulma α. Ohjeita (jos kaipaat):

$b = 1{,}2 \cdot k$, $b / r = \alpha$, $(k/2)/r = \sin(\alpha/2)$ (piirrä kuva). Näistä saat yhtälön $1{,}2 \cdot \sin(\alpha/2) = \alpha/2$. Merkitse $\beta = \alpha/2$. Käytä graafista ratkaisua ja sitten haarukointia.

1.13 Sievennä lauseke $\dfrac{x^4 - x^2 - 12}{x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6}$.

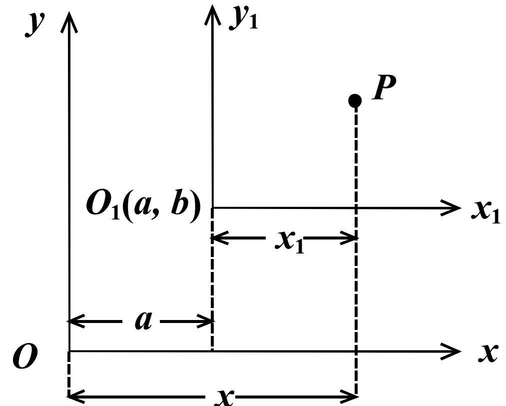
1.14 Sievennä lauseke $\dfrac{30r^3 + 79r^2 + 8r - 5}{6r^2 - r - 1}$.

1.15 Iterointi ei aina toimi. Jos esimerkiksi ratkaiset yhtälöstä $x^3 - 2x - 5 = 0$ "yhden x:n erilleen" seuraavasti: $x = \dfrac{x^3 - 5}{2}$ ja lähdet iteroimaan arvosta $x_1 = 2{,}1$ eteenpäin, niin saadut arvot lähtevät hajaantumaan. Miten saat iteroitua yhtälön $\ln x = x - 2$ a) suuremman juuren ($\approx 3{,}146$) b) pienemmän juuren ($\approx 0{,}159$)?

2 Paraabeli

2.1 Koordinaatiston siirto

Ajatellaan xy-akselisto siirretyksi yhdensuuntaissiirrolla uuteen paikkaan, jolloin saadaan xy-tasoon uusi koordinaatisto x_1y_1. Origo O siirtyy xy-tason tietyksi pisteeksi $O_1(a,b)$.



Jos $P(x,y)$ on jokin piste xy-tasossa, niin uuden koordinaatiston kannalta katsottuna pisteen P koordinaateilla ovat uudet arvot x_1 ja y_1. Kuvan mukaan $x = x_1 + a$ ja vastaavasti $y = y_1 + b$. Siis *pisteen P vanhojen ja uusien koordinaattien välillä on yhteys*

(1) $$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x_1 + a} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{y_1 + b} \end{aligned}}.$$

*Kuvassa uusi origo ja piste P ovat xy-koordinaatiston 1. neljänneksessä. Yleisempi perustelu saataisiin vektoreilla:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1P} \Leftrightarrow [x,y] = [a,b] + [x_1,y_1] \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + x_1 \\ y = b + y_1 \end{cases}.$$

Esim. 1 Kun origo siirretään sopivaan pisteeseen (a,b), niin käyrän $y = x^2 + 2x + 3$ yhtälöstä häviävät vakiotermi ja 1. asteen termi. Määritä tämä yhtälö ja piirrä kuva.

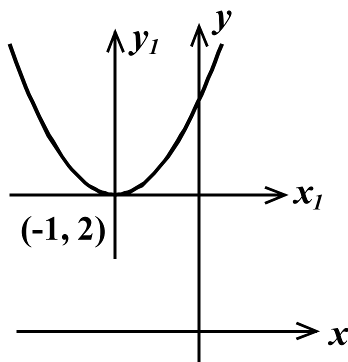
Sijoitetaan käyrän yhtälöön x:n ja y:n paikalle siirtoyhtälöiden (1) mukaiset lausekkeet. Näin saadaan käyrän yhtälö x_1y_1-koordinaatistossa:

$$y_1 + b = (x_1 + a)^2 + 2(x_1 + a) + 3$$

$$y_1 = x_1^2 + (2a + 2)x_1 + a^2 + 2a + 3 - b$$

Tästä yhtälöstä häviävät x_1-termi ja vakiotermi, mikäli a ja b valitaan siten, että seuraavat kaksi yhtälöä toteutuvat:

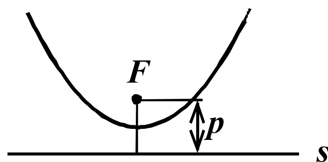
$$\begin{cases} 2a+2=0 & \therefore a=-1, \text{ sij. 2. yhtälöön} \\ a^2+2a+3-b=0 & 1-2+3-b=0 \ \therefore b=2. \end{cases}$$



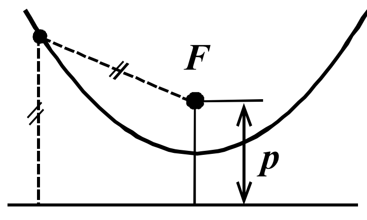
Jos siis origo siirretään pisteeseen $(-1, 2)$, niin alkuperäinen yhtälö muuttuu muotoon $y_1 = x_1^2$. Täten kyseessä on paraabeli, joka on muuten kuin perusparaabeli, mutta huippu on *xy*-koordinaatiston pisteessä $(-1, 2)$.

2.2 Paraabelin määrittely ja yhtälö

Koska paraabeli on yksi tärkeimmistä esimerkkikäyristä matematiikan kursseissa, tätä käyrää selvitetään jatkossa aika perusteellisesti.



Oletetaan, että geometrisessa tasossa on annettu eräs suora ***s*** (***johtosuora***) ja sen ulkopuolella oleva piste ***F*** (***polttopiste***). Merkitään polttopisteen etäisyyttä johtosuorasta *p*:llä.



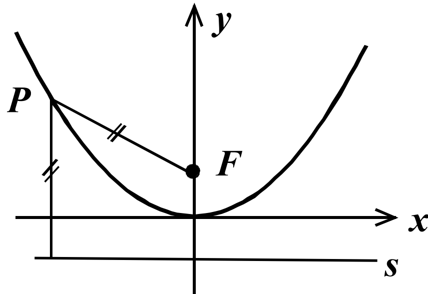
Määritelmä: *Kaikki ne pisteet tasossa, jotka ovat yhtä kaukana johtosuorasta s ja polttopisteestä F, muodostavat* ***paraabelin****.*

Etäisyyttä *p* sanotaan paraabelin ***parametriksi***. Parametrin *p* suuruus vaikuttaa paraabelin kokoon (kuvan mittakaavaan). ***Kaikki paraabelit ovat siis yhdenmuotoisia****, vaikkakin pienikokoista paraabelia sanotaan usein "kapeaksi" ja suurikokoista "leveäksi".*

Lähinnä johtosuoraa oleva paraabelin piste on paraabelin ***huippu***. Huippu on paraabelin pisteenä yhtä kaukana (etäisyydellä *p*/2) polttopisteestä ja johtosuorasta. Huipusta lähtevä ja polttopisteen kautta kulkeva puolisuora on paraabelin ***akseli***. Määrittelynsä nojalla paraabeli on symmetrinen akselinsa suhteen.

Kuten edellä olevasta esimerkistä 1 selviää, paraabelin yhtälö riippuu siitä, missä kohdassa koordinaattiakselisto on paraabeliin nähden. Mahdollisimman yksinkertainen yhtälö saadaan, kun koordinaatiston origo sijoitetaan paraabelin huippuun. Seuraavassa johdetaan paraabelin yhtälö tällaisessa koordinaatistossa.

Tehtävä: *Johda paraabelin yhtälö sellaisessa koordinaatistossa, jonka origo on paraabelin huipussa ja positiivinen y-akseli yhtyy paraabelin akseliin* (vrt. seuraava kuva).



Polttopiste ja johtosuora ovat kumpikin etäisyydellä $p/2$ x-akselista. Siten polttopisteen koordinaatit ovat $F = (0, p/2)$. Tason yleinen piste $P(x, y)$ on paraabelilla jos ja vain jos P on yhtä kaukana polttopisteestä F ja johtosuorasta s. Tämä ehto on yhtälömuodossa seuraava:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y - \frac{p}{2})^2} = y + \frac{p}{2}$$ | $y \geq 0$, joten yhtälön kumpikin puoli on positiivinen ja yhtälö voidaan korottaa neliöön

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}$$

$$x^2 = 2py$$

$$y = \frac{1}{2p}x^2 \qquad \Big|\ \text{merkitään } \frac{1}{2p} = a \ \ (\therefore a > 0)$$

$$\therefore \underline{\underline{y = ax^2}}$$

Tulos: ***Origohuippuisen, ylöspäin aukeavan paraabelin yhtälö on***

(2) $$\boxed{\boldsymbol{y = ax^2}}, \qquad \text{*missä } a = \frac{1}{2p} > 0.$$

Yhtälöstä $a = \frac{1}{2p}$ seuraa, että $p = \frac{1}{2a}$. Tästä nähdään, että p ja sen mukana koko *paraabeli on sitä pienempi, mitä suurempi kerroin a on*.

Jos paraabelin yhtälössä kerroin a vaihdetaan vastaluvukseen $-a$, niin paraabelin jokaisen pisteen y-koordinaatti muuttuu vastaluvukseen ja paraabelista tulee alaspäin aukeava, mutta koko ei muutu.

Yhdistetään saadut tulokset seuraavaan lauseeseen:

Lause 1 *Muotoa* $\boldsymbol{y = ax^2}$ $(a \neq 0)$ *olevat yhtälöt esittävät kaikkia origohuippuisia, ylöspäin* $(a > 0)$ *tai alaspäin* $(a < 0)$ *aukeavia paraabeleja.*

Paraabeli on sitä pienempi ("kapeampi") mitä suurempi $|a|$ *on.*

**Paraabelin polttopisteen etäisyys huipusta on* $\frac{p}{2} = \frac{1}{4|a|}$.

Esim. 2 Yhtälö $y = -\frac{1}{3}x^2$ esittää origohuippuista, alaspäin aukeavaa paraabelia, joka on perusparaabelia suurempi ("leveämpi", koska $\frac{1}{3} < 1$).

*Paraabelin polttopiste on negatiivisella y-akselilla kohdassa $y = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4 \cdot (-\frac{1}{3})} = -\frac{3}{4}$. Johtosuora on x-akselin yläpuolella etäisyydellä 3/4 x-akselista, ts. johtosuoran yhtälö on $y = 3/4$.

Paraabeli voidaan piirtää määritelmään perustuen (polttopisteen ja johtosuoran avulla) tai helpommin antamalla x:lle esim. arvot 1, 2 ja 3 sekä käyttämällä symmetrisyyttä y-akselin suhteen.

Huom. Joskus tekniikassa (mm. lujuusopissa) y-akseli suuntautuu alaspäin. Siksi esim. sanontaa "ylöspäin aukeava" parempi sanonta saattaisi olla "positiiviseen y-suuntaan aukeava".

2.3 Paraabeli 2. asteen polynomifunktion kuvaajana

Jos paraabelin huippu ei ole origossa, yhtälö mutkistuu:

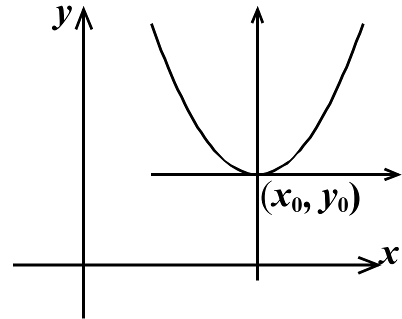
Lause 2 *Sellaisen paraabelin, joka on paraabelin* $y = ax^2$ *kokoinen ja asentoinen, mutta huippu on pisteessä* (x_0, y_0), *yhtälö on*

(3) $$\boxed{\boldsymbol{y - y_0 = a(x - x_0)^2}}.$$

**Todistus:* Siirretään origo pisteeseen (x_0, y_0), ts. tehdään yhtälöön (3) muunnos

$$\begin{cases} x = x_1 + x_0 \\ y = y_1 + y_0 \end{cases} \text{ eli } \begin{cases} x - x_0 = x_1 \\ y - y_0 = y_1 \end{cases}.$$

Tällöin käyrän yhtälö (3) muuttuu muotoon $y_1 = ax_1^2$, joten kyseessä on muuten samanlainen käyrä kuin $y = ax^2$, mutta huippu on pisteessä (x_0, y_0).



Esim. 3 Yhtälö $y = -3x^2$ esittää origohuippuista, alaspäin aukeavaa paraabelia, joka on perusparaabelia pienempi (kapeampi). Muuten samanlaisen, mutta $(2,-1)$-huippuisen paraabelin yhtälö on

$$y - (-1) = -3(x-2)^2$$
$$y + 1 = -3(x^2 - 4x + 4)$$
$$y = -3x^2 + 12x - 13.$$

Huipun siirto pois origosta aiheutti sen, että yhtälöön tulivat myös 1. asteen termi ja vakiotermi. Sen sijaan 2. asteen termi säilyi ennallaan.

Samaan tapaan yleisesti jokaisen ylös- tai alaspäin aukeavan paraabelin yhtälö (3) saadaan sieventämällä muotoon

(4) $$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}.$$

Näytetään nyt esimerkin avulla kääntäen, että jos otetaan jokin muotoa (4) oleva yhtälö, se saadaan neliöimällä muotoon (3) ja siten sen kuvaaja on ylös- tai alaspäin aukeava paraabeli.

Esim. 4 Muuta yhtälö $y = 2x^2 + 12x + 13$ *neliöimällä* muotoon (3).

Siirretään ensin vakiotermi vasemmalle puolelle ja *otetaan x^2-termin kerroin 2 tekijäksi x:ää sisältävistä termeistä*:

$$y - 13 = 2\cdot(x^2 + 6x) \quad | \text{neliöinti}$$
$$y - 13 + 2\cdot 3^2 = 2\cdot(x^2 + 6x + 3^2)$$

Huomaa, että oikealle puolelle ei tehty lisäystä 3^2 vaan edessä olevan tekijän 2 vuoksi lisäys $2 \cdot 3^2$. Näin saadaan yhtälö muotoon

$$y + 5 = 2 \cdot (x + 3)^2.$$

Kyseessä on siis ylöspäin aukeava paraabeli, joka on perusparaabelia pienempi ja jonka huippu on pisteessä $(-3,-5)$.

Yleisesti:

Lause 3 *Toisen asteen polynomifunktiot*

(4) $$\boxed{y = ax^2 + bx + c} \quad (a, b, c \in \mathbf{R},\ \ a \neq 0)$$

esittävät kaikkia niitä paraabeleja, joiden akselit ovat pystysuoria. Kerroin a määrää paraabelin koon ja aukeamissuunnan.

**Paraabelin huipun x-koordinaatti on* $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

Huom. Huipun x-koordinaatti saadaan luonnollisimmin ns. *derivaatan* avulla (kunhan tämä käsite on opetettu).

2.4 Vaakasuora paraabeli

Kun yhtälöissä (2), (3) ja (4) vaihdetaan x ja y keskenään, saadaan yhtälöt

$$x = ay^2,\ \ x - x_0 = a(y - y_0)^2,\ \ x = ay^2 + by + c.$$

Ne esittävät paraabeleja, joiden akseli on vaakasuora ja jotka aukeavat oikealle (positiiviseen x-suuntaan) tai vasemmalle sen mukaan, onko $a > 0$ vai $a < 0$.

Esim. 5 Tutki käyrää $x + y^2 + 2y - 1 = 0$.

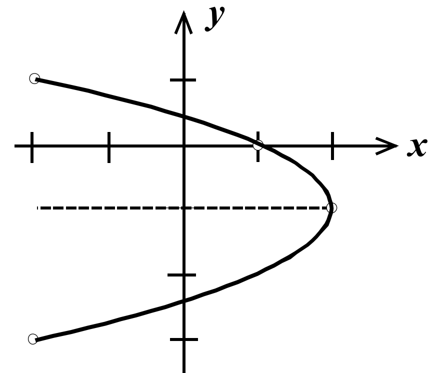
Kun tästä yhtälöstä ratkaistaan x, saadaan $x = -y^2 - 2y + 1$, mistä nähdään, että kyseessä on vasemmalle aukeava paraabeli (koska y^2:n kerroin on negatiivinen). Paraabeli on perusparaabelin kokoinen (mikä sekin näkyy y^2:n kertoimesta).

Huipun y-koordinaatti on y-akselin ja paraabelin leikkauskohtien $y = -1 \pm \sqrt{2}$ keskivälissä

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = -1,$$

$$x_0 = -(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1 = 2.$$

Tämän jälkeen paraabeli voidaan piirtää (viereinen kuva).



Huom. Edellisten esimerkkien mukaan *vaaka- tai pystysuoran paraabelin yhtälölle on tyypillistä, että siinä toinen tuntemattomista esiintyy potenssissa 2 ja toinen vain 1. potenssissa.*

*Jos paraabelin akseli on vinossa xy-akselistoon nähden, yhtälössä on mukana myös xy-termi.

Harjoituksia

A

2.1 Minkä muodon yhtälö $x^2 + 4x - y + 5 = 0$ saa, kun origo siirretään (yhdensuuntaissiirrolla) pisteeseen $(-2, 1)$. Piirrä kuva.

2.2 Piirrä paraabeli, jonka johtosuora on suora $y = -x$ ja polttopiste on $(1, 1)$.

2.3 *Määritä paraabelin $y = 0{,}25x^2$ polttopiste ja johtosuora.

2.4 Negatiivisen y-akselin suuntaan aukeava paraabeli on perusparaabelin kokoinen ja huippu on $(-3, 4)$. Määritä yhtälö.

2.5 Paraabeli on origohuippuinen ja sen akseli on pystysuorassa. Lisäksi paraabeli kulkee pisteen (2,–6) kautta. Määritä paraabelin yhtälö. (Ohje: paraabeli on lauseen 1 mukaista muotoa ja annettu piste toteuttaa yhtälön.)

2.6 Pystyakselisen paraabelin huippu on pisteessä (2,–1) ja paraabeli kulkee origon kautta. Määritä yhtälö. (Ohje: paraabeli on lauseen 2 mukaista muotoa ja annettu piste toteuttaa yhtälön.)

2.7 Tutki paraabelia (koko, aukeamissuunta, huippu, kuva)

a) $y = x^2 + 4x + 4$, b) $y = -2x^2 + 4x$, c) $x = -2y^2 + 4y$.

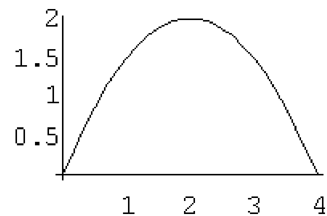
B

2.8 Kun origo siirretään sopivaan pisteeseen (a,b), käyrän yhtälöstä $x^2 - 4x - y = 7$ häviävät x-termi ja vakiotermi. Määritä tämä piste (siirtokaavojen avulla). Piirrä kuva.

2.9 Kun origo siirretään sopivaan pisteeseen (a,b), käyrän yhtälöstä $xy - x + 2y = 3$ häviävät 1. asteen termit (samalla vakiotermi saattaa muuttua). Määritä tämä piste ja käyrän yhtälö siirron jälkeen. Piirrä kuva.

2.10 Johda (samaan tapaan kuin johdettiin yhtälö (2)) sellaisen paraabelin yhtälö, jonka johtosuorana on suora $y = -x$ ja polttopisteenä on $(1,1)$. Vinosta asennosta johtuen yhtälöön tulee myös xy-termi.

2.11 Määritä viereisen paraabelin a) yhtälö, *b) polttopiste.



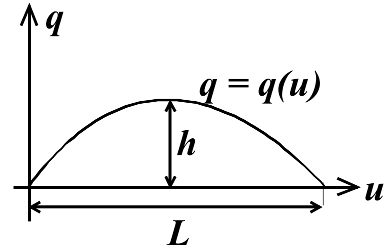
2.12 Koska pysty- tai vaaka-akselisen paraabelin yhtälössä on kolme kerrointa a, b, c, niin *kolme pistettä määrää tällaisen paraabelin*. Määritä sellaisen paraabelin yhtälö, joka kulkee a) origon ja pisteiden $(1,2)$, $(-1,4)$ kautta ja on pystyakselinen, b) pisteiden $(0,1), (0,2)$ ja $(2,3)$ kautta ja on vaaka-akselinen.

2.13 Hahmottele paraabelin $y = (2x-1)(2x-7)$ kuvaaja. (Vihje: yhtälöstä saat helposti leikkauskohdat x-akselin kanssa. Huippu on niiden puolessa välissä.)

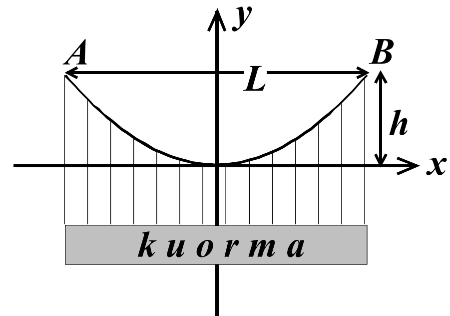
2.14 Perusparaabelin kokoinen, alaspäin aukeava paraabeli kulkee origon kautta ja sen huippu on suoralla $y = 2x + 4$. Määritä huippu. (Ohje: Merkitse huipun x-koordinaattia x_0:lla, jolloin y-koordinaatti on .... ja yhtälö on ...)

2.15 *Mikä on sen paraabelin yhtälö, jonka huippu on $(1, 2)$ ja polttopiste $(4, 2)$?

2.16 Määritä viereisen kuvan mukaisen paraabelin yhtälö. (Tällainen tehtävä voi tulla esiin esim. lujuusopissa, kun käsitellään paraabelin muotoista kuormaa. Tehtävä on periaatteessa samanlainen kuin edelliseen kuvaan liittyvä tehtävä 2.11 a).)



2.17 Jos kahdesta pisteestä tuettua köyttä kuormittaa vaakasuunnassa tasainen kuorma, niin köysi asettuu paraabelin muotoon (mekaniikan mukaan). Määritä köyden yhtälö siinä tapauksessa, että köyden päiden väli on L, köyden päiden ja alimman pisteen korkeusero on h ja koordinaatiston origoksi on valittu köyden alin piste (vrt. kuva).



C

2.18 Alaspäin aukeava paraabeli on perusparaabelin kokoinen ja kulkee origon kautta. Lisäksi sen huippu on paraabelilla $y = x^2 - 4x + 4$. Määritä yhtälö.

2.19 Paraabelia $y = 2x^2 + 1$ leikataan suoran $x - 2y + 1 = 0$ suuntaisilla suorilla. Osoita, että näin saatujen jänteiden keskipisteet ovat samalla suoralla (joka on akselin suuntainen).

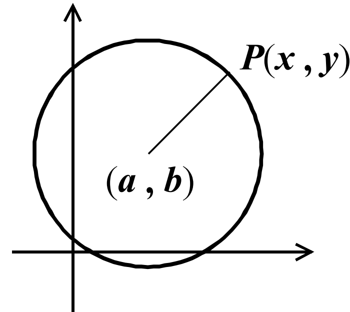
2.20 Määritä pisteestä (0, 3) paraabelille $y = 2x^2 - 6x + 5$ piirretyt tangentit (ohje: diskriminanttikeino; tehtävä ratkeaa myös derivaatan avulla).

2.21 Määritä paraabelin $y = x^2 + 3x$ tangentti, joka on suoran $y = 5x$ suuntainen (sama ohje kuin edellä).

3 Ympyrä, ellipsi ja hyperbeli

3.1 Ympyrä

Piste $P(x, y)$ on (a, b)-keskisen, r-säteisen ympyrän (ympyräviivan) piste tarkalleen silloin, kun P:n ja keskipisteen välinen etäisyys on $= r$ eli tämän etäisyyden neliö on $= r^2$:



(1) $\boxed{\mathbf{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}}$.

Esim. 1 Yhtälö $(x-3)^2+(y+2)^2=4/9$ esittää ympyrää, jonka $kp=(3,-2)$ ja $r=2/3$. Kun yhtälössä suoritetaan neliöön korotukset, tämän ympyrän yhtälö saa muodon

$$x^2+y^2-6x+4y+\tfrac{113}{9}=0 \;\big|\cdot 9$$
$$9x^2+9y^2-54x+36y+113=0.$$

Yleisesti: Jokaisen ympyrän (1) yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

(2) $\boxed{\mathbf{x^2+y^2+Ax+By+C=0}}$ $(A, B, C \in \mathbf{R})$.

Ympyrän yhtälö on siis sekä x:n että y:n suhteen toista astetta. Lisäksi toisen asteen termien kertoimet ovat yhtä suuret (esimerkissä 1 ne ovat kumpikin = 9)

*Ympyrän yhtälössä ei voi olla *sekatermiä xy*, koska ympyrä ei voi olla vinossa asennossa koordinaatistoon nähden.

Kääntäen jokainen muotoa (2) oleva yhtälö saadaan neliöimällä muotoon

$$(x+A/2)^2+(y+B/2)^2=(A/2)^2+(B/2)^2-C.$$

Jos tässä $op \ge 0$, yhtälö esittää ympyrää, jonka $kp=(-A/2,-B/2)$ ja säde on op:n neliöjuuri. Jos taas $op<0$, yhtälö ei esitä mitään reaalista käyrää (koska $vp \ge 0, op < 0$).

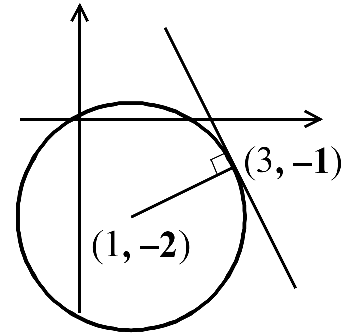
Esim. 2 Määritä ympyrän $x^2+y^2-2x+4y=0$ se tangentti, joka kulkee pisteen $(3,-1)$ kautta.

Piste $(3,-1)$ *on ympyrällä* (ympyrän kehällä) oleva piste, sillä se toteuttaa ympyrän yhtälön (tarkista tämä). Neliöidään yhtälö:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 1 + 4$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$$

$$\therefore\ kp = (1,-2),\ r = \sqrt{5}.$$



Tangentti on kohtisuorassa sädettä vastaan (kuva). Säteen kulmakerroin on 1/2, joten tangentin kulmakerroin on tämän käänteisluvun vastaluku, siis –2. Tangentin yhtälö on siten

$$y + 1 = -2(x-3) \quad \text{eli} \quad \underline{\underline{2x + y - 5 = 0}}.$$

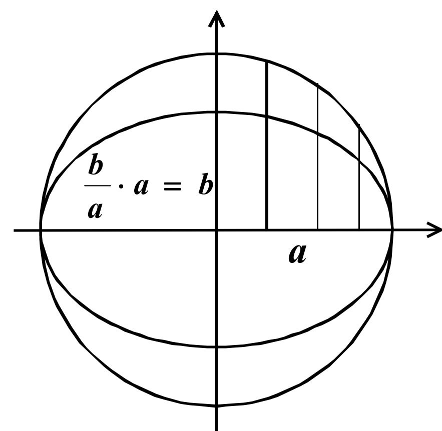
Jos piste ei olisi ollut ympyrällä vaan sen ulkopuolella, niin tangentit olisi saatu käyttämällä ehtoa, että keskipisteen etäisyyden tangentista pitää olla = säde. *Muita tapoja: diskriminanttikeino ja derivointiin perustuva keino (joka esitetään käyrän tangenttia ja pinnan tangenttitasoa käsittelevässä kohdassa).

Koska ympyrän yhtälössä (2) on kolme yleistä kerrointa *A, B* ja *C*, niin ***kolme pistettä*** *(jotka eivät ole samalla suoralla)* ***määrää ympyrän***. Tämän ympyrän yhtälö saadaan esim. siten, että sijoitetaan näiden pisteiden *P, Q* ja *R* koordinaatit yhtälöön (2) ja ratkaistaan tällä tavoin kertoimille *A, B* ja *C* saatu lineaarinen yhtälöryhmä. Voitaisiin myös käyttää tietoa, että ympyrän keskipiste on janojen *PQ* ja *QR* keskinormaalien leikkauspiste.

3.2 Ellipsi

Olkoon $a > b > 0$. Ellipsi saadaan, kun a-säteistä, origokeskistä ympyrää

(3) $\quad x^2 + y^2 = a^2$ eli $y^2 = a^2 - x^2$



litistetään y-akselin suunnassa suhteessa $b : a$, ts. ympyrän jokaisen pisteen y-koordinaatti kerrotaan luvulla $\frac{b}{a}$. Tämä käy kertomalla edellinen y^2:n lauseke

luvulla $\left(\frac{b}{a}\right)^2$. Näin saadaan ellipsin pisteille yhtälö

$$y^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot (a^2 - x^2) \;\Big|\; : b^2$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}.$$

Siis

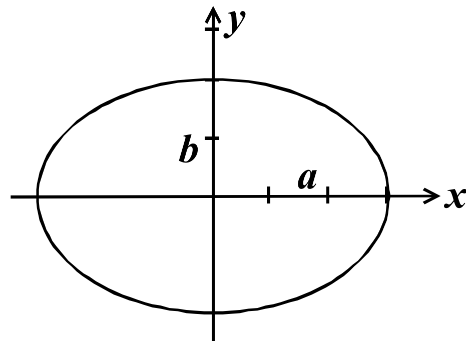
(4) $$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}.$$

Tässä a ja b ovat ellipsin ***puoliakselit***, $2a$ = ***isoakseli*** ja $2b$ = ***pikkuakseli***. Ellipsi leikkaa koordinaattiakselit kohdissa $x = \pm a$ ja $y = \pm b$.

Esim. 3 Viereisen kuvan ellipsin puoliakselit ovat 3 ja 2 ja yhtälö on siten

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \Big|\cdot 4 \cdot 9$$

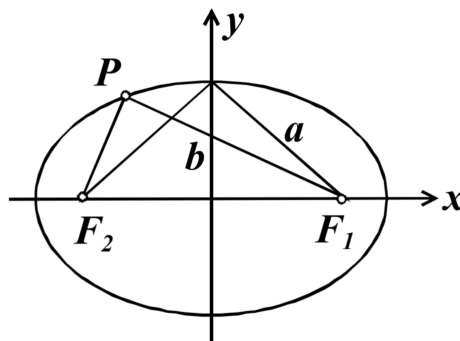
eli $4x^2 + 9y^2 = 36$.



*Kun ympyrä projisioidaan yhdensuuntaisprojektiolla toiselle tasolle, joka ei ole ympyrän tason suuntainen, saadaan ellipsi, sillä kyseessä on itse asiassa juuri tällainen "litistäminen". Jos nimittäin ajatellaan xy-tason ympyrää (3) kallistetuksi x-akselin ympäri kulman α verran ja sitten projisioiduksi kohtisuorasti xy-tasolle (tai sen suuntaiselle tasolle), niin jokainen y-akselin suuntainen ympyrän jänne tulee kerrotuksi samalla luvulla $\cos\alpha$. Siis "litistys-suhde" $b/a = \cos\alpha$. Tämän ominaisuuden vuoksi teknillisissä kuvissa akselileikkaukset yms. ympyröiden kuvat näkyvät ellipseinä.

Ellipsin yhtälö voidaan johtaa toisellakin tavalla. Olkoot F_1 ja F_2 x-akselin sellaiset pisteet, että niiden etäisyydet pikkuakselin päätepisteistä ovat $= a$ (vrt. seuraava kuva). Voidaan todistaa, että sama ellipsi (4) muodostuu kaikista niistä xy-tason pisteistä P, jotka täyttävät ehdon

(5) $\boxed{PF_1 + PF_2 = 2a}$.

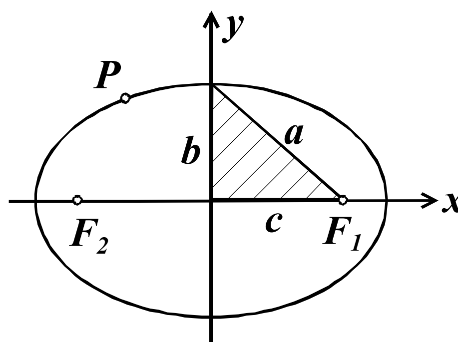


Pisteitä F_1 ja F_2 sanotaan ellipsin ***polttopisteiksi*** ja janoja PF_1 ja PF_2 ***polttosäteiksi***.

Ehdon (5) mukaan *ellipsillä* ***polttosäteiden summa on vakio*** *(= isoakselin pituus)*.

Polttopisteiden välistä etäisyyttä merkitään yleensä $2c$:llä. Täten

$$F_1 = (c, 0),\ F_2 = (-c, 0).$$



Lukujen *a, b* ja *c* välillä on seuraava yhteys (vrt. kuva):

(6) $$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}.$$

*Ellipsin litteyttä kuvaa pikku- ja isoakselin suhde $2b/2a = b/a$. Samaan tarkoitukseen käytetään myös lukua

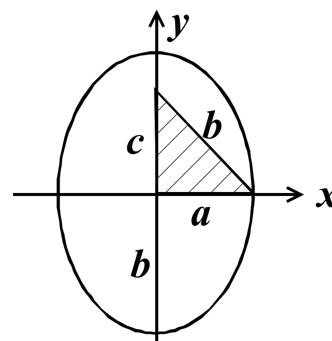
(7) $$e = \frac{\text{polttopisteväli}}{\text{isoakseli}} \quad (= \frac{c}{a}),$$

joka on ns. ***eksentrisyys***. Koska $0 < c < a$, niin $0 \le e < 1$. Ellipsi, jonka eksentrisyys $e = 0$, on ympyrä, sillä

$$e = 0 \overset{(7)}{\Rightarrow} c = 0 \overset{(6)}{\Rightarrow} a = b.$$

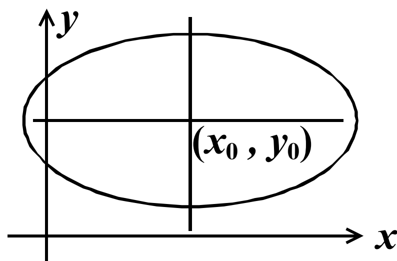
Jos taas $e \approx 1$, niin $c \approx a$ ja (6):n nojalla $b \approx 0$. Ellipsi on tässä tapauksessa siis hyvin litteä ja polttopisteet ovat lähellä huippuja.

Jos $b > a$, niin ympyrän (3) muuttaminen ellipsiksi siten, että ympyrän jokaisen pisteen y-koordinaatti kerrotaan luvulla $b : a$, *venyttää* ympyrää y-suunnassa. Yhtälöksi tulee sama kuin edellä, siis



$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (\text{eli } \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1).$$

Ellipsin isoakseli ja samoin polttopisteet ovat nyt y-akselilla ja isoakselin pituus on $2b$. *Ehto (6) korvautuu ehdolla $b^2 = a^2 + c^2$ (vrt. edellinen kuva).



Jos ellipsin akselit ovat koordinaattiakselien suuntaiset, mutta keskipiste on (x_0, y_0), niin yhtälö on

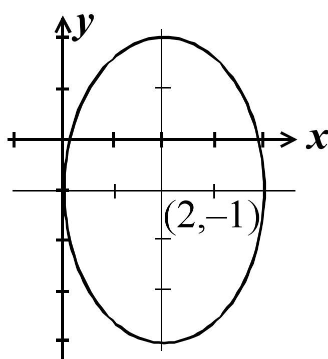
$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1}.$$

Esim. 4 Tutki käyrää $9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 4 = 0$.

Neliöinti: $9(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 + 2y + 1) = -4 + 9 \cdot 4 + 4 \cdot 1$

$$9(x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 36 \quad |:36$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1.$$



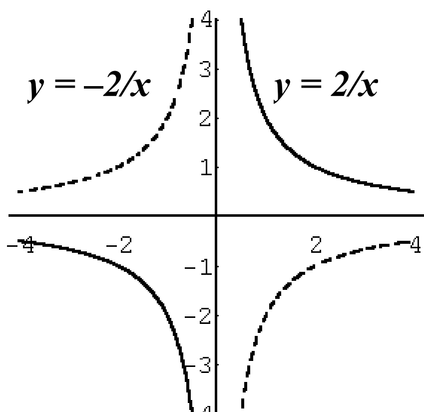
Kyseessä on siis ellipsi, jonka $kp = (2,-1)$ ja puoliakselit ovat $a = 2,\ b = 3$. *Polttopisteet ovat y-akselin suuntaisilla suorilla etäisyyksillä

$$c = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

keskipisteestä.

*Eksentrisyys on $e = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0{,}75$.

3.3 Hyperbeli



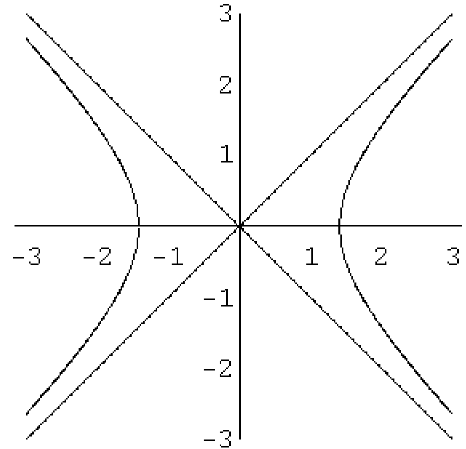
1 Yhtälö

(8) $\boxed{y = \frac{k}{x}}$ (k = vakio)

esittää hyperbeliä, jonka ***asymptootteina*** ovat koordinaattiakselit. Mitä suurempi k on itseisarvoltaan, sitä kauempana hyperbelin haarat ovat toisiaan.

2 Esim. ne kaksi hyperbeliä, jotka on piirretty edelliseen kuvaan, ovat toistensa ***liittohyperbelejä***. Niissä *k*:lla ovat vastakkaiset arvot 2 ja –2.

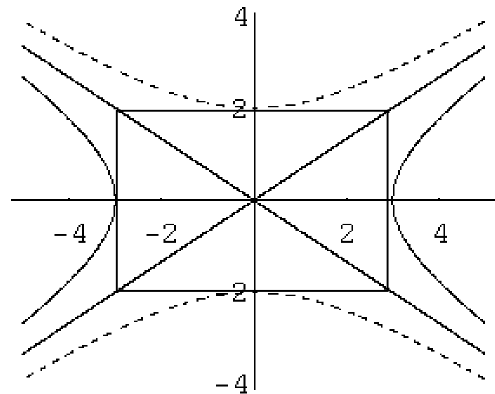
3 Kun hyperbeliä (8) kierretään origon ympäri 45° myötäpäivään (tai koordinaatistoa 45° vastapäivään), hyperbelin yhtälö muuttuu muotoon



(9) $$x^2 - y^2 = a^2 \quad (a \neq 0)$$

kuten myöhemmin osoitetaan. Tämän hyperbelin *asymptootit* ovat suorat $y = \pm x$ ja hyperbelin ***huiput*** ovat kohdissa $x = \pm a$.

4 Kun hyperbeliä (9) asymptootteineen "litistetään" *y*-suunnassa suhteessa *b*/*a*, saadaan hyperbeli



(10) $$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1},$$

jonka asymptootteina ovat suorat $y = \pm \frac{b}{a} x$ ja huiput ovat edelleenkin *x*-akselilla kohdissa $x = \pm a$. Tällainen hyperbeli saadaan piirrettyä, kun ensin piirretään edellisen kuvan mukainen suorakulmio (sivujen pituuksina 2*a* ja 2*b*), sitten suorakulmion lävistäjäsuorat (asymptootit) ja viimeksi hyperbeli suorakulmion ulkopuolelle niin, että sen haarat lähestyvät näitä asymptoottisuoria.

Esim. 5 Edelliseen kuvaan on piirretty hyperbeli, jossa $a = 3$ ja $b = 2$. Yhtälö on täten $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ eli $4x^2 - 9y^2 = 36$. Vastaavan ellipsin yhtälössä olisi – -merkin tilalla + ja ellipsi tulisi saman suorakulmion sisälle.

Kuvaan on piirretty myös tämän hyperbelin ***liittohyperbeli***, jonka yhtälö on

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = -1 \text{ eli } \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1.$$

Liittohyperbeli kaartuu y-suuntaan. Sen yhtälöstä nähdään, että y-suuntainen puoliakseli on = 2 ja x-suuntainen = 3, ts. liittohyperbeliä piirrettäessä käytössä on sama suorakulmio kuin alkuperäisellökin hyperbelillä.

5. Jos hyperbelin akselit ovat koordinaattiakselien suuntaiset, mutta keskipiste on (x_0, y_0), niin yhtälö on

(11) $$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Harjoituksia

A

3.1 Esitä (1,–3)-keskisen, 4-säteisen ympyrän yhtälö muodossa (2).

3.2 Määritä neliöimällä seuraavien ympyröiden keskipisteet ja säteet: a) $x^2 + y^2 - 2y = 0$, b) $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 20 = 0$.

3.3. Määritä origon ja pisteiden P(1,–2), Q(1, 3) kautta kulkevan ympyrän yhtälö (ohje: 3 yhtälöä ja 3 tuntematonta A, B, C).

3.4 Määritä edellisen tehtävän ympyrän keskipiste seuraavilla tavoilla: a) graafisesti keskinormaalien leikkauspisteenä, b) laskemalla kahden (helpoimman) keskinormaalin yhtälöt ja niiden leikkauspiste, c) neliöimällä edellisessä tehtävässä saatu vastaus.

3.5 Määritä ympyrän $x^2 + y^2 = 5$ pisteeseen $(-2, 1)$ piirretyn tangentin yhtälö. Piirrä kuva.

3.6 Määritä seuraavien ellipsien puoliakselit ja piirrä kuva:

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, b) $4x^2 + y^2 = 4$.

3.7 Määritä edellisen tehtävän ellipsien polttopisteet.

3.8 Piirrä hyperbelit

a) $xy = 4$, b) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, c) $4x^2 - y^2 = 4$, d) $y^2 - 4x^2 = 4$.

3.9 Määritä sen hyperbelin yhtälö, jolla $a = b = 4$, $kp = (-2, 5)$ ja joka kaartuu y-suuntaan.

B

3.10 Mikä on ympyrän $x^2 + y^2 - 4y = 16$ pisteeseen (4, 4) piirretyn tangentin yhtälö?

3.11 Määritä pisteiden $(-3, 5), (-2, 4)$ ja (2,–4) kautta kulkevan ympyrän yhtälö.

3.12 Määritä ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ ne tangentit, jotka ovat kohtisuorassa suoraa $x + 2y - 1 = 0$ vastaan, seuraavilla tavoilla:

a) Tangentti on muotoa $y = 2x + b$ (miksi?). Ympyrän keskipisteen etäisyyden tästä suorasta pitää olla säteen suuruinen.

b) Sivuamispisteet saat ympyrän ja suoran $x + 2y = 0$ leikkauspisteinä (miksi?).

3.13 Määritä laskemalla, mikä ympyrän $x^2 + y^2 + 6x + 4 = 0$ piste on lähinnä suoraa $2x - y = 4$.

3.14 Todista, että pisteestä (2,–4) ympyrälle $x^2 + y^2 = 10$ piirretyt tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

3.15 Mikä on sen ellipsin yhtälö, jonka polttopisteet ovat $(\pm 5, 0)$ ja pikkuakselin pituus on 8 ?

3.16 Määritä (neliöimällä) ellipsin $x^2 + 4y^2 + 4x - 24y + 36 = 0$ keskipiste ja puoliakselit. Piirrä kuva.

3.17 Ellipsin polttopisteet ovat $(-2, 5)$ ja $(-2, 11)$ ja ellipsi kulkee pisteen $(-2, 13)$ kautta. Määritä yhtälö.

3.18 Hiukkanen kiertää ellipsin muotoista rataa, jonka toisessa polttopisteessä on toinen hiukkanen. Laske radan eksentrisyys, kun hiukkasten pisin välimatka on 12 ja lyhin 3.

3.19 Piirrä seuraavat käyrät (suorita ensin neliöinti):

a) $x^2 - 2y^2 = 4x$, b) $x^2 - 2y^2 = 4y$.

3.20 *Määritä ne hyperbelin $x^2 - 4y^2 = 20$ tangentit, jotka ovat kohtisuorassa suoraa $4x + 3y - 7 = 0$ vastaan. (Ohje: tangentti on muotoa $3x - 4y + c = 0$ (miksi?). Käytä diskriminanttikeinoa.)

3.21 Mitä hyperbeliin liittyviä viivoja yhtälö $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0$ esittää? (Vihje: tulon nollasääntö.)

C

3.22 Määritä sellainen a:n arvo, että suora $x + 2y = 12$ on ympyrän $x^2 + y^2 - 4x - a = 0$ tangentti.

3.23 Ympyrän keskipiste on suoralla $y = x + 2$ ja ympyrä sivuaa suoria $x + 2y = 0$ ja $x + 2y + 10 = 0$. Määritä ympyrän keskipiste ja säde.

3.24 Piste liikkuu siten, että se on koko ajan kaksi kertaa niin kaukana pisteestä (2, 0) kuin pisteestä (–2, 0). Määritä pisteen uran yhtälö.

3.25 Perustele: Piste $P(x, y)$ on ympyrän $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ sisällä, jos ja vain jos $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 < 0$.

3.26 Käyrien $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$ ja $x^2 - 8x + y + 12 = 0$ ylimmät pisteet A ja B yhdistetään. Origo keskipisteenä piirretään suoraa AB sivuava ympyrä. Määritä sivuamispiste.

3.27 Samoin kuin ellipsillä, myös hyperbelillä on kaksi polttopistettä F_1 ja F_2. Hyperbelin $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ polttopisteet ovat $(\pm c, 0)$ ja sen liittohyperbelin $(0, \pm c)$. Luku c saadaan yhtälöstä

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

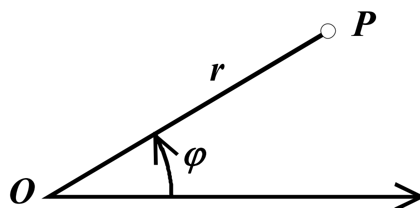
Hyperbelillä polttosäteiden *erotus* on $\pm 2a$. Piirrä seuraavat kolme käyrää samaan kuvaan ja määritä niiden polttopisteet sekä merkitse ne kuvaan:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1 \qquad \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = -1 \qquad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

4 Napakoordinaatit ja koordinaatiston kierto

2.1 Suorakulmaisten ja napakoordinaattien välinen yhteys

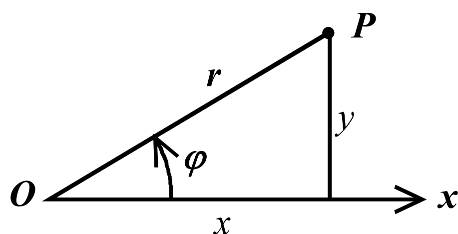
Pisteen P asema tasossa voidaan esittää paitsi suorakulmaisten xy-koordinaattien, myös ns. ***napakoordinaattien*** eli *polaaristen koordinaattien* $\boldsymbol{r}$ ja $\boldsymbol{\varphi}$ avulla. Tässä



1) $\boldsymbol{r}$ = P:n etäisyys kiinteästä pisteestä O (= origo, *napa*, pooli) $\therefore r \geq 0$,

2) $\boldsymbol{\varphi}$ = O:sta lähtevän kiinteän puolisuoran (*napa-akselin*) ja säteen OP välinen suunnattu kulma, ns. ***vaihekulma***. Vaihekulma $\boldsymbol{\varphi}$ voidaan yleensä rajoittaa yhden kierroksen suuruiselle välille, esim. välille $0 \leq \varphi < 2\pi$ tai välille $-\pi < \varphi \leq \pi$. Joskus kuitenkin (esim. spiraalimaista liikettä kuvattaessa) tarvitaan useita kierroksia.

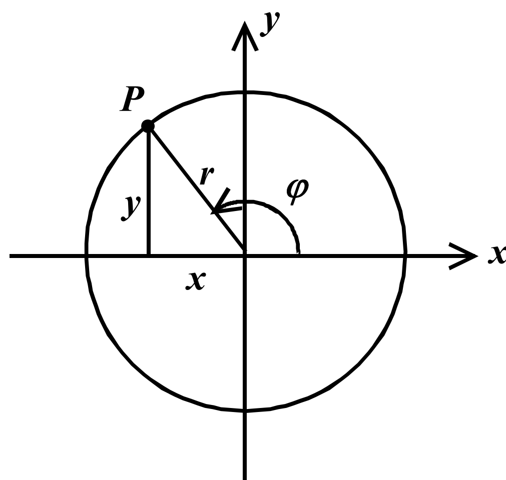
Yleensä napa-akseliksi valitaan positiivinen x-akseli. Tällöin pisteen P suorakulmaiset koordinaatit voidaan esittää napakoordinaattien trigonometrisina lausekkeina



(1) $$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{r}\cos\boldsymbol{\varphi} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{r}\sin\boldsymbol{\varphi} \end{aligned}},$$

sillä sinin ja kosinin määritelmien mukaan

$$\sin\varphi = \frac{y}{r}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{r}.$$



Käänteiset muunnoskaavat saadaan tiedosta, että r on pisteen $P(x, y)$ etäisyys origosta ja tangentin määritelmästä:

(2) $$\boxed{\boldsymbol{r} = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2}\ ,\ \tan\boldsymbol{\varphi} = \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}}} \quad (\Rightarrow \varphi_0 = \ldots \Rightarrow \varphi = \ldots).$$

Huom. Kun φ lasketaan kaavasta $\tan\varphi = y / x$, niin φ*:n oikea neljännes on valittava pisteen* $P(x, y)$ *sijainnin mukaan.*

Esim. 1 a) Jos $r = 2{,}05$ ja $\varphi = 215°$, niin 3 numeron tarkkuudella

$$\begin{cases} x = 2{,}05 \cdot \cos 215° \approx -1{,}68 \\ y = 2{,}05 \cdot \sin 215° \approx -1{,}18 \end{cases}$$

b) Laske pisteen $P(-3{,}12; 4{,}14)$ napakoordinaatit.

$$r = \sqrt{3{,}12^2 + 4{,}14^2} \approx 5{,}19$$

$$\tan\varphi = \frac{4{,}15}{-3{,}12} = -1{,}330... \quad \Big| \quad \varphi_0 = 53{,}06...°,$$

2. neljännes, koska x < 0, y > 0

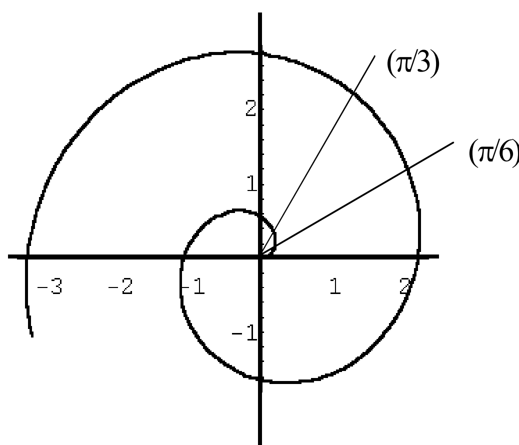
$$\therefore \varphi = 180° - 53{,}06...° \approx \underline{\underline{126{,}9°}}.$$

4.2 Käyrän yhtälö napakoordinaatistossa

Esim. 2 Origokeskisen 3-säteisen ympyrän yhtälö on napakoordinaateissa hyvin yksinkertainen: Ympyrä muodostuu kaikista niistä pisteistä, joilla $r = 3$ ja φ mikä tahansa. Yhtälö on siis

$$r = 3\,.$$

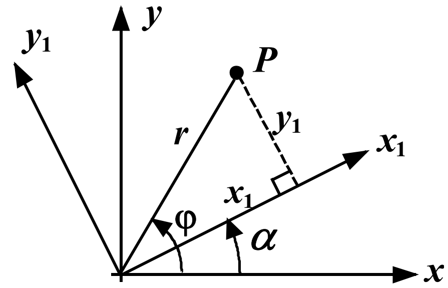
Esim. 3 Piirrä käyrä $r = 0{,}35 \cdot \varphi$ $([\varphi] = 1\text{ rad})$. Tämä on eräs ns. *Arkhimedeen spiraali*. Vaihekulmalle φ voidaan antaa vain ei-negatiivisia arvoja, sillä muuten etäisyys $r < 0$. Annetaan esim. seuraavat arvot ja lasketaan vastaavat r:n arvot, jolloin tasoon voidaan merkitä spiraalin pisteitä (r, φ):



φ	r
0	0
$\pi/6$	≈0,18
$\pi/3$	≈0,36
$\pi/2$	≈0,55
π	≈1,1
2π	≈2,2
3π	≈3,3
4π	≈4,4

4.3 Koordinaatiston kierto

Kierretään xy-koordinaatisto origon ympäri x_1y_1-koordinaatistoksi. Tason yleisen pisteen $P(x, y)$ vanhojen koodinaattien (x, y) ja napakoordinaattien (r, φ) välillä on yhteys



(3) $$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}.$$

Uuden koordinaatiston x_1y_1 suhteen pisteen P napakoordinaatit ovat r ja $\varphi - \alpha$ (napa-akselina on nyt x_1-akseli). Täten

(4) $$\begin{cases} x_1 = r\cos(\varphi - \alpha) \\ y_1 = r\sin(\varphi - \alpha) \end{cases}.$$

Hajoitetaan kaavat (4) vähennyslaskukaavoilla ja käytetään tulosta (3):

$$\begin{aligned} x_1 &= \overbrace{r\cos\varphi}^{=x}\cos\alpha + \overbrace{r\sin\varphi}^{=y}\sin\alpha = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y_1 &= \underbrace{r\sin\varphi}_{=y}\cos\alpha - \underbrace{r\cos\varphi}_{=x}\sin\alpha = y\cos\alpha - x\sin\alpha \end{aligned}.$$

Siis

(5) $$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{x_1} &= \mathbf{(\cos\alpha)x + (\sin\alpha)y} \\ \mathbf{y_1} &= \mathbf{-(\sin\alpha)x + (\cos\alpha)y} \end{aligned}} \qquad \left.\begin{vmatrix} \cdot\cos\alpha \\ \cdot(-\sin\alpha) \end{vmatrix}\right\}+ \quad \left.\begin{vmatrix} \cdot\sin\alpha \\ \cdot\cos\alpha \end{vmatrix}\right\}+$$

Kun tästä yhtälöparista ratkaistaan x ja y, saadaan käänteiset kaavat

(6) $$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{(\cos\alpha)x_1 - (\sin\alpha)y_1} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{(\sin\alpha)x_1 + (\cos\alpha)y_1} \end{aligned}}.$$

Yhtälöt (5) ja (6) ovat matriisimuotoon kirjoitettuina seuraavat:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Näistä edellinen voidaan esittää lyhyesti muodossa $X_1 = AX$, missä A on ns. ***kiertomatriisi***. Jälkimmäisessä on sama matriisi, mutta transponoituna, joten sen vastaava esitys on $X = A^T X_1$.

Esim. 4 Mitkä ovat pisteen (2, 4) uudet koordinaatit, kun koordinaatistoa kierretään $+30°$?

Ratkaistaan tehtävä harjoituksen vuoksi matriiseja käyttäen (kaavan (5) sijasta). Koska $\sin 30° = ½$ ja $\cos 30° = \sqrt{3}/2$ $= ½ \cdot \sqrt{3}$ niin kiertomatriisista saadaan ½ ulos:

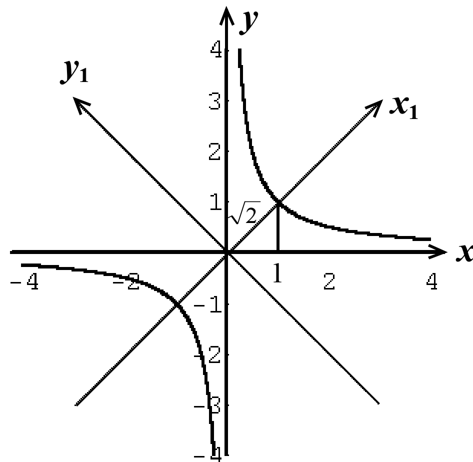
$$A = ½ \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = ½ \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= ½ \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3} \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ -1 \cdot 2 + \sqrt{3} \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} + 2 \\ -1 + 2\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Täten $\underline{\underline{x_1 = 2 + \sqrt{3},\ y_1 = -1 + 2\sqrt{3}}}$. Tarkista tuloksen suuruusluokka siten, että piirrät kiertoa koskevan kuvan.

Esim. 5 Minkä muodon hyperbelin $xy = 1$ eli $y = \dfrac{1}{x}$ yhtälö saa, kun koordinaatistoa kierretään $+45°$?

Koska *x* ja *y* täytyy saada lausuttua uusien koordinaattien x_1 ja y_1 lausekkeena, niin oikeat kaavat ovat nyt kaavat (6) eivätkä kaavat (5).



Koska

$$\sin 45° = \cos 45° = 1/\sqrt{2},$$

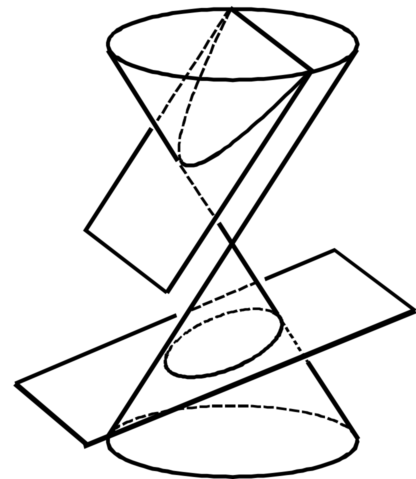
nämä kaavat saavat muodon

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} x_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_1 \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_1 \end{cases}.$$

Kun nämä sijoitetaan käyrän yhtälöön $xy = 1$ ja suoritetaan kertolasku, saadaan $\dfrac{x_1^2}{2} - \dfrac{y_1^2}{2} = 1$.

Uuden koordinaatiston kannalta kyseessä on hyperbeli, jolla $a = b = \sqrt{2}$.

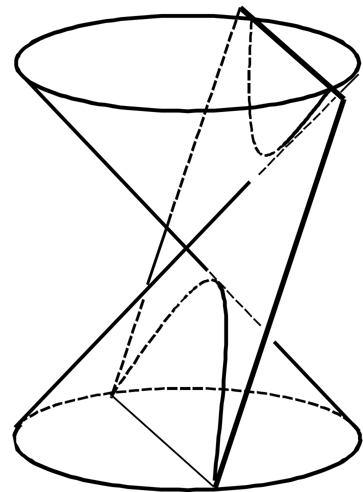
4.4 Kartioleikkaukset



Voidaan todistaa, että jos ympyräkartiota leikataan tasolla, joka ei kulje kartion kärjen kautta, leikkauskäyrä on leikkaavan tason suunnasta riippuen, *ellipsi* (tai sen erikoistapaus ympyrä), *paraabeli* tai *hyperbeli* (vrt. viereiset kuvat). Tästä syystä näitä käyriä sanotaa ***kartioleikkauksiksi*** (*Conic sections*).

Kartioleikkauksia voidaan sanoa myös ***toisen asteen käyriksi***, sillä niiden yhtälöt ovat 2. astetta, ts. muotoa

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\,.$$



Jos yhtälössä esiintyy ***sekatermi*** xy , käyrä on vinossa asennossa xy-akselistoon nähden. Sekatermi voidaan poistaa sopivalla koordinaatiston kierrolla, kuten seuraava esimerkki osoittaa. Ympyrän yhtälössä ei voi esiintyä sekatermiä.

*Seuraavan esimerkin mukaisella laskutavalla voi olla käyttöä esim. lujuusopissa.

Esim. 6 Poista xy-termi yhtälöstä

(7) $$2x^2 - 2xy + y^2 = 4$$

sopivalla koordinaatiston kierrolla.

Sijoitetaan kiertokaavat

$$\begin{cases} x = (\cos\alpha)x_1 - (\sin\alpha)y_1 \\ y = (\sin\alpha)x_1 + (\cos\alpha)y_1 \end{cases}$$

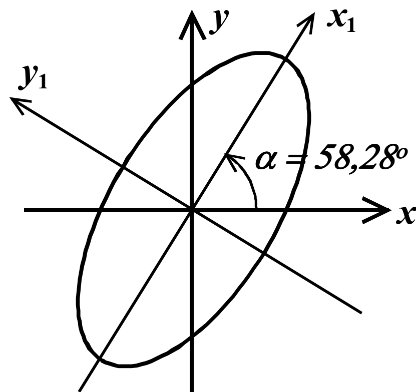
käyrän yhtälöön (7). Kun termejä ryhmitellään ja käytetään kaksinkertaisen kulman kaavoja, yhtälö saadaan muotoon

(8) $$\begin{aligned} &(1 - \cos^2\alpha - \sin 2\alpha)x_1{}^2 - (\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha)x_1y_1 + \\ &+(1 + \sin^2\alpha + \sin 2\alpha)y_1{}^2 = 4 \end{aligned}$$

(suorita laskut paperilla!). Sekatermi $x_1 y_1$ häviää, jos kiertokulma α valitaan siten, että sekatermin kerroin on = 0:

$$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = 0 \quad \Big| :\cos 2\alpha$$
$$\tan 2\alpha = -2$$
$$2\alpha \approx 116{,}56° \ (+n \cdot 180°).$$

Täten luonnollisin kiertokulman arvo on $\alpha \approx 58{,}28°$. Sijoitetaan tämä yhtälöön (8), joka saa muodon

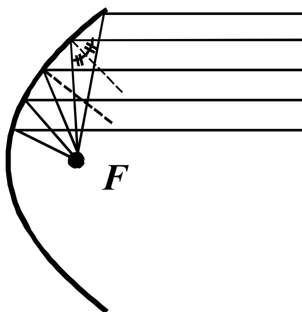


$$0{,}3820 x_1^2 + 2{,}618 y_1^2 \approx 4$$

eli

$$\frac{x_1^2}{10{,}47} + \frac{y_1^2}{1{,}527} \approx 1.$$

Kyseessä on siis origokeskinen ellipsi, jonka isoakseli muodostaa x-akselin kanssa kulman $\alpha \approx 58{,}28°$ ja jonka puoliakselit ovat $a \approx 3{,}24$, $b \approx 1{,}24$.



Kartioleikkauksilla on monia muitakin yhtäläisyyksiä keskenään sen lisäksi, että kaikkien yhtälöt ovat toista astetta. Esimerkiksi ellipsin normaali, samoin hyperbelin tangentti puolittaa polttosäteiden välisen kulman. Siten ellipsillä polttopisteestä lähtevät säteet heijastuvat käyrässä toiseen polttopisteeseen. Paraabelilla taas polttopisteestä lähtevät säteet heijastuvat akselin suuntaisiksi. Sama päinvastoin sanottuna: *Paraabelilla akselin suuntaiset säteet heijastuvat polttopisteeseen* (*parabolinen peili*).

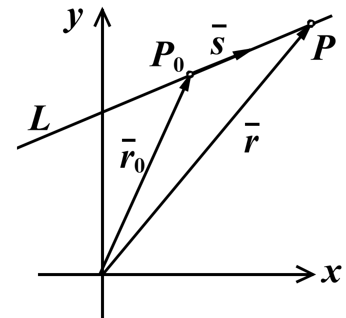
4.5 Käsite "analyyttinen geometria"

Matematiikan osaa, jossa geometriset tehtävät muutetaan algebrallisiksi, laskennollisiksi koordinaatteja ja nykyään usein vektoreita apuna käyttäen, sanotaan perinteisesti ***analyyttiseksi geometriaksi***. Edellä on suoraa, ympyrää, paraabelia, ellipsiä ja hyperbeliä koskevissa kohdissa käsitelty *tasokäyrien analyyttistä geometriaa*. Niissä on näitä viivoja koskevat tehtävät muutettu yhtälöitä tai yhtälöryhmiä koskeviksi.

Seuraava esimerkki osoittaa, miten suoraa voidaan käsitellä vektorilaskentaa käyttäen.

***Esim.** 7* Oletetaan, että tunnetaan suoran L yksi piste $P_0 = (x_0, y_0)$ ja jokin suuntavektori $\bar{s} = [s_1, s_2]$. Pisteen P_0 paikkavektori on silloin $\bar{r}_0 = [x_0, y_0]$.

Tason yleinen piste $P(x, y)$ on suoralla L, jos ja vain jos sen paikkavektori $\bar{r}$ on muotoa



(9) $$\boxed{\bar{r} = \bar{r}_0 + t\,\bar{s}} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

eli jos $\bar{r}$ saadaan siten, että $\bar{r}_0$:aan lisätään $\bar{s}$ sopivalla reaaliluvulla t kerrottuna. Esim. viereisessä kuvassa $\bar{r} \approx \bar{r}_0 + 2\,\bar{s}$.

Yhtälö (9) on suoran vektorimuotoinen yhtälö. Yhtälössä on mukana parametri t, jota vaihtelemalla $\bar{r}$:n kärki P siirtyy pitkin suoraa L. Vektoriyhtälö (9) on komponenttimuodossa

$$[x, y] = [x_0, y_0] + t\,[s_1, s_2] \quad \text{eli} \quad [x, y] = [x_0 + t\,s_1, y_0 + t\,s_2].$$

Tämä hajoaa kahdeksi tavalliseksi yhtälöksi, t parametrina:

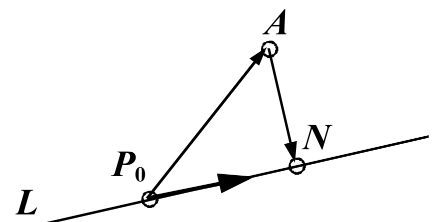
$$\begin{cases} x = x_0 + t\,s_1 \\ y = y_0 + t\,s_2 \end{cases} \qquad (\textit{suoran parametriyhtälöt}).$$

Kun näistä eliminoidaan t esim. sijoituskeinolla, saadaan

$$y - y_0 = \frac{s_2}{s_1}(x - x_0),$$

ts. "tavallinen", muotoa $y - y_0 = k(x - x_0)$ oleva esitys.

Vektoriesityksen avulla voidaan laskea mm. pisteen A etäisyys tämän esimerkin mukaisesta suorasta L siten, että lasketaan ensin vektorin $\overrightarrow{P_0A}$ projektio $\overrightarrow{P_0N}$ suuntavektorilla $\bar{s}$. Sen jälkeen $\overrightarrow{AN}$-vektori saadaan näiden kahden vektorin erotuksena.



Suoraa voidaan käsitellä vektoreita käyttäen aivan vastaavasti *avaruudessakin*, vain kolmannet komponentit tulevat lisää.

Harjoituksia

A

4.1 Pisteen napakoordinaatit ovat

a) $r = 2, \varphi = 5\pi / 6$, b) $r = 4, \varphi = 7\pi / 6$, c) $r = 3{,}42, \varphi = 97{,}2°$.

Laske *xy*-koordinaatit. Piirrä a)- ja b)-kohdissa kuvat ja käytä apuna koordinaattikolmiota.

4.2 Pisteen suorakulmaiset *xy*-koordinaatit ovat

a) $(1, -\sqrt{3})$, b) $(-1, -1)$, c) $(-2{,}34; -5{,}67)$.

Laske napakoordinaatit. Piirrä a)- ja b)-kohdissa kuvat ja käytä apuna koordinaattikolmiota. Käytä c)-kohdassa esimerkin 1 mukaista tapaa.

4.3 Piirrä eräs ns. *logaritminen spiraali* $r = 0{,}52\, e^{0{,}14\varphi}$ antamalla φ:lle arvoja väliltä $-\pi ... 3\pi$.

4.4 Kolmion kärjet ovat $A(0, 0), B(4, 0), C(2, 4)$. Koordinaatistoa kierretään kulman +30° verran. Määritä pisteiden B ja C uudet koordinaatit. Piirrä kuva ja tarkista tulokset kuvasta mittaamalla. (käytä sinin ja kosinin tarkkoja arvoja).

B

4.5 Pisteen napakoordinaatit ovat

a) $(3, -\pi / 6)$, b) $(3, 7\pi / 6)$, c) $(2, -36°)$.

Laske *xy*-koordinaatit. Käytä a)- ja b)-kohdissa laskinta vain tuloksen tarkistamiseen ja suorita varsinainen laskeminen käyttäen apuna trig. taitoja, esim. a)- kohdassa sinin parittomuutta ja b)-kohdassa kulman palauttamista peruskulmaan: $\sin(7\pi / 6)$ $= \sin(\pi + \pi / 6) = -\sin(\pi / 6) = -1 / 2$.

4.6 Laske seuraavien xy-tason pisteiden napakoordinaatit. Piirrä a)- ja b)-kohdissa kuvat ja käytä apuna koordinaattikolmiota. Käytä c)- ja d)-kohdissa napakoordinaattien muunnoskaavoja (ja peruskulmaa).

a) $(1,-1)$, b) $(-\sqrt{3},1)$, c) $(-4,-4\sqrt{3})$, d) $(-4,3)$.

4.7 Piirrä käyrä $r = 6\cos\varphi$ seuraavalla kahdella tavalla:

a) Anna φ:lle arvoja $10°$ välein (käyrää tulee vain 1. ja 4. neljännekseen, koska r:n pitää olla positiivinen; käytä myös kosinin parillisuutta),

b) Muuta yhtälö xy-koordinaatistoon (vihje: kerro yhtälö ensin r:llä).

4.8 Piirrä käyrä a) $r = \cos 2\varphi$, b) $r = \cos 3\varphi$.

4.9 Kolmion kärjet ovat $A(0,0), B(4,0), C(3,2)$. Koordinaatistoa kierretään kulman $2\pi/3$ verran. Määritä pisteiden B ja C uudet koordinaatit (tarkat arvot). Piirrä kuva ja tarkista tulokset kuvasta mittaamalla.

4.10 Kolmion kärjet ovat $A(0,0), B(4,0), C(2,4)$. *Koordinaatisto pysyy paikallaan, mutta kolmiota kierretään* A:n ympäri kulman $+\pi/6$ verran. Määritä uuden kolmion ADE kärkien D ja E koordinaatit. Piirrä kuva ja tarkista tulokset kuvasta mittaamalla. Käytä sinin ja kosinin tarkkoja arvoja. Vihje: voit käyttää koordinaatiston kiertokaavoja, kunhan kiertokulmaksi valitset $-\pi/6$ (miksi?).

4.11 *Tutki, onko käyrä $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2 = 0$ ellipsi, hyperbeli vai paraabeli, kiertämällä koordinaatistoa $45°$.

4.12 *Tutki sopivaa kiertoa käyttäen käyrää $3xy - 4y^2 + 18 = 0$.

C

4.13 ***Arkhimedeen spiraalilla*** $r = k\varphi$ (k = vakio) pisteen P etäisyys origosta kasvaa suoraan verrannollisena kulmaan φ. Tämän ominaisuuden takia tällä spiraalilla on teknillisiä sovelluksia (mm. koneenrakennuksessa). Määritä xy-tason pisteen $(-2,-3)$ kautta kulkevan tällaisen spiraalin yhtälö.

4.14 ***Logaritmisella spiraalilla*** $r = a\,e^{k\varphi}$ säteen OP ja pisteeseen P piirretyn tangentin välisellä kulmalla on sama arvo käyrän jokaisessa pisteessä (kuten derivoimalla voidaan todistaa). Tätä ominaisuutta käytetään tekniikassa mm. terien muotoilussa. Määritä xy-tason pisteiden $(0{,}5;1)$ ja $(-3{,}3)$ kautta kulkevan spiraalin yhtälö.

4.15 Piirrä käyrät a) $r = 4\sin 2\varphi$, b) $r = 4\sin 3\varphi$, c) $r = 2(1-\cos\varphi)$, d) $r = 2/\sin\varphi$, e) $r = 2/\cos(\varphi - 30°)$.

4.16 Koordinaatisto siirretään ensin (yhdensuuntaissiirrolla) pisteeseen $(3, 2)$ koordinaatistoksi x_1y_1 ja tämä kierretään 25° (uuden origonsa ympäri) koordinaatistoksi x_2y_2. Laske pisteen (5,0) uudet koordinaatit. Tarkista tulos kuvasta mittaamalla.

4.17 Kuten edellinen, mutta ensin kierto ja sitten siirto.

4.18 Ellipsi, jonka puoliakselit ovat $a = 2, b = 1$ ja keskipiste on $(2, 0)$, on vinossa asennossa xy-akselistoon nähden siten, että isoakseli muodostaa 45° kulman x-akseliin nähden. Määritä ellipsin yhtälö.

4.19 Mikä käyrälaji on kyseessä seuraavassa:

a) $x + y(y-1) + 1 = 0$,

b) $x^2 + y(y-1) + 1 = 0$,

c) $x^2 - y(y-1) + 1 = 0$,

d) $x^2 - 4y^2 = 0$ (eli $x^2/4 - y^2/1 = 0$),

e) $x^2 + 4y^2 = 0$.

4.20 Osoita laskemalla, että paraabelin $y^2 = 4x$ pisteeseen $P(1,2)$ piirretty normaali puolittaa polttosäteen PF ja akselin suuntaisen suoran välisen kulman.

5 Eräitä sovelluksissa käytettäviä menetelmiä

5.1 Interpolointi ja käyrien sovittaminen dataan

Esimerkiksi taulukkoja käytettäessä voidaan joutua etsimään taulukon antamien arvojen välisiä arvoja. Tähän käytetään tavallisesti ns. ***lineaarista interpolointia***. Sitä voidaan käyttää silloin, kun funktion arvot muuttuvat tarkasteltavalla välillä likimain *lineaarisesti*.

Tällainen *lineaarisuus*-oletus voidaan tehdä yleensä silloin, kun tarkasteltava väli on aika pieni (eikä kyseessä ole mikään tiheään värähtelevä käyrä, vaan jokin "tavallinen, tasaisesti kaartuva" käyrä)

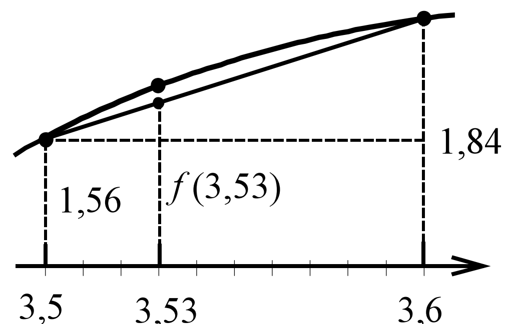
Esim. 1 Oletetaan, että funktion $y = f(x)$ arvot muuttuvat välillä $3{,}5 \le x \le 3{,}6$ likimain lineaarisesti. Tiedetään, että

$$f(3{,}5) = 1{,}56 \text{ ja } f(3{,}6) = 1{,}84 .$$

Laske $f(3{,}53)$.

Välillä $3{,}5 \ldots 3{,}6$ funktion arvo muuttuu määrän

$$1{,}84 - 1{,}56 = 0{,}28 .$$



Väli $3{,}5 \ldots 3{,}53$ on kolme kymmenesosaa välistä $3{,}5 \ldots 3{,}6$. Siten arvoon 1,56 on lisättävä 3/10 kokonaismuutoksesta 0,28. Siis

$$f(3{,}53) \approx 1{,}56 + \frac{3}{10} \cdot (1{,}84 - 1{,}56)$$

$$= 1{,}56 + \frac{3}{10} \cdot 0{,}28 \approx \underline{\underline{1{,}64}}.$$

Esim. 2 Tiedetään, että $f(2{,}25) = 1{,}56$ ja $f(2{,}26) = 1{,}84$. Laske $f(2{,}257)$ lineaarisella interpoloinnilla.

Tässä tapauksessa osaväli $2{,}25 \ldots 2{,}257\,(= 0{,}007)$ on 7/10 kokonaisvälistä $2{,}25 \ldots 2{,}26\,(= 0{,}01 = 0{,}010)$, joten

$$f(2{,}257) \approx 1{,}56 + \frac{7}{10} \cdot (1{,}84 - 1{,}56) \approx \underline{\underline{1{,}76}}.$$

Esim. 3 Laske puuttuva taulukkoarvo z:

a)

x	$g(x)$
2,1	1,95
2,16	z
2,2	1,73

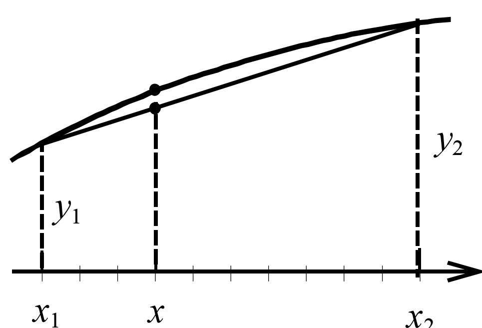
$$z \approx 1{,}95 + \frac{6}{10} \cdot (1{,}73 - 1{,}95) \approx 1{,}82.$$

Tässä esimerkissä funktion arvot pienenevät, joten kokonaismuutos $1{,}73 - 1{,}95 = -0{,}22 < 0$.

b)

x	$h(x)$
2,56	0,128
z	0,141
2,58	0,194

$$z \approx 2{,}56 + \frac{41 - 28}{94 - 28} \cdot 0{,}02 \approx 2{,}564.$$



*Lineaarisessa interpoloinnissa on geometrisesti ajateltuna kysymys siitä, että kokonaisvälillä $x_1 \ldots x_2$ käyrä $y = f(x)$ korvataan pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta kulkevalla suoralla ja interpoloitu arvo kohdassa x otetaan suoralta eikä käyrältä. Suoran yhtälö on

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1).$$

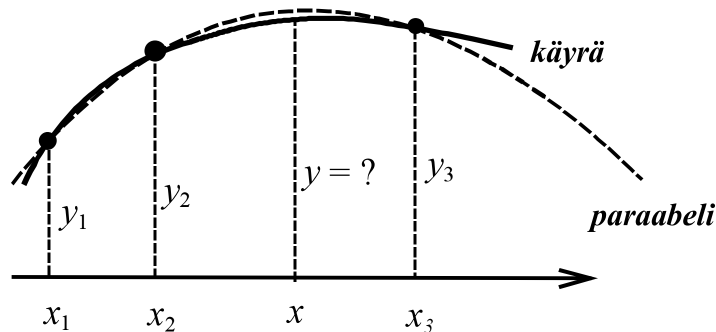
*Ratkaistaan tästä y sekä vaihdetaan osoittajassa y- ja x-tekijöiden järjestys. Näin saadaan interpolointikaava

(1) $$\boxed{y \approx y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot (y_2 - y_1)}.$$

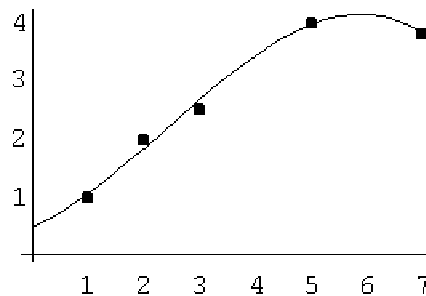
*Laske *Esim. 3 a*) tällä kaavalla. Jos haluat laskea *b*)-kohdan, niin kaavasta on ratkaistava x. Opettele kuitenkin edellisten esimerkkien ajattelutapa ja tarkista aina, että tuloksesi on oikeaa suuruusluokkaa (päätepistearvojen välissä).

Jos kohta x on välin $x_1 \ldots x_2$ ulkopuolella, kyseessä on ns. ***ekstrapolointi***. Tulosta (1) tai edellisten esimerkkien ajattelutapaa voidaan käyttää tällöinkin.

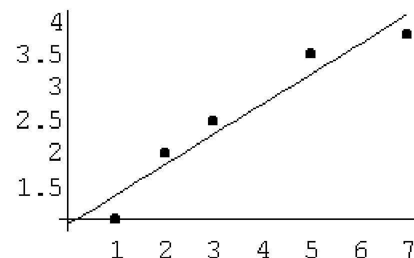
Lineaarisessa interpoloinnissa korvattiin kahden peräkkäisen pisteen (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) välinen käyränosa suoralla, jolta väliarvoa x vastaava y:n arvo laskettiin. Ns. ***neliöllisessä interpoloinnissa*** korvataan *kolmen* pisteen kautta kulkeva käyränosa paraabelilla $y = ax^2 + bx + c$ ja lasketaan väliarvo tältä käyrältä. (Kertoimien a, b ja c arvojen määrittämiseksi tarvitaan 3 pistettä.)



Voidaan myös käyttää kolmannen tai korkeamman asteen *interpolaatiopolynomeja*, mutta laskenta vaatii tällöin yleensä jo matematiikkaohjelmien käyttämistä.



Interpoloinnissa etsitään polynomimuotoista tai muuta käyrää, joka kulkee *tarkalleen* annettujen pisteiden kautta. Sovelluksissa on kuitenkin usein tärkeämpää löytää sellainen käyrä, joka mukailisi kokeellisesti saatuja datapisteitä mahdollisimman hyvin, mutta ei kuitenkaan ehkä kulkisi tarkalleen näiden pisteiden kautta. Tällöin kysymys on *käyrän **sovittamisesta*** (*engl.* ***curve fitting***) *annettuun pistejoukkoon.* Esim. yllä olevassa kuvassa on annetulle viiden pisteen pistejoukolle etsitty 3. asteen polynomisovite. Tällaiset tehtävät vaativat yleensä matematiikkaohjelmien tai *Excel*in tms. käyttöä.



Ensimmäisen asteen polynomisovitetta $y = ax + b$ sanotaan ***regressiosuoraksi*** (vrt. viereinen kuva). Sen kertoimien laskemiseksi johdetaan myöhemmin (derivoimalla) tietyt laskukaavat.

Regressiosuoran kertoimet saadaan laskettua myös laskimilla, joissa on tilastollisia toimintoja.

5.2 Eksponentti- ja logaritmiyhtälöt

Logaritmin määritelmän mukaan *"perusmuotoisen"* ***eksponenttiyhtälön*** *ratkaisu on logaritmi*: $\boldsymbol{k^x = a \Leftrightarrow x = \log_k a}$. Erityisesti

$$\boxed{e^x = a \Leftrightarrow x = \ln a} \quad \text{ja} \quad \boxed{10^x = a \Leftrightarrow x = \lg a}.$$

Esim. 4 1) $2e^x = 5 \Leftrightarrow e^x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \ln\frac{5}{2} \approx 0{,}916.$

2) $2{,}74 \cdot 10^{2x} = 8{,}88$

$10^{2x} = 3{,}240... \Leftrightarrow 2x = \lg 3{,}240... \Leftrightarrow x \approx 0{,}255.$

*3) $3^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_3 5 = \frac{\ln 5}{\ln 3} \approx 1{,}465$.

Kohdissa 1) ja 2) käytetty menetelmä on "se, mitä käytännössäkin käytetään". Sen sijaan kohdassa 3) jouduttiin 3-kantaiseen logaritmiin ja se täytyi osata muuttaa luonnolliseksi logaritmiksi, jotta ratkaisulle saatiin likiarvo (jollaista sovelluksissa yleensä tarvitaan). Tilanteeseen 3) parempi "***perusmenetelmä***" *on ottaa luonnollinen logaritmi kummastakin puolesta ja käyttää logaritmien laskulakeja* seuraavasti:

Esim. 5 1) $3^x = 5$ | Otetaan luonn. log. kummastakin puolesta

$\ln 3^x = \ln 5$ | käytetään laskulakia $\ln a^c = c \ln a$

$x \ln 3 = \ln 5$ (yhtälö muuttui 1. asteen yhtälöksi)

$x = \frac{\ln 5}{\ln 3} \approx 1{,}465.$

2) $4^{x-2} \cdot 3^x = 2$ | Otetaan luonn. log. kummastakin puolesta ja käytetään sääntöä $\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln 4^{x-2} + \ln 3^x = \ln 2$

$(x-2)\ln 4 + x \ln 3 = \ln 2$ (yhtälö muuttui 1. asteen yhtälöksi)

$(\ln 4 + \ln 3)x = \ln 2 + 2\ln 4 \quad \therefore \; x \approx 1{,}395.$

*Seuraavaan esimerkkiin ei sovellu edellisessä käytetty "perusmenetelmä", koska summan tai erotuksen logaritmille ei ole olemassa

laskulakia ts. esim. logaritmia $\ln(a+b)$ ei voi hajoittaa osiin $\ln a$ ja $\ln b$.

Esim. 6 $\quad 2^x - 2^{1-x} = 3 \mid$ tästä saadaan 2^x:lle yhtälö

$$2^x - 2^1 \cdot 2^{-x} = 3$$

$$2^x - \frac{2}{2^x} = 3 \quad \Big| \cdot 2^x \quad (\text{joka on } \neq 0)$$

$$(2^x)^2 - 2 = 3 \cdot 2^x$$

$$(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x - 2 = 0 \quad (\text{saatiin } 2^x\text{:lle 2. asteen yhtälö})$$

$$2^x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \approx 3{,}562 \vee -0{,}562.$$

Täten yhtälö hajosi kahdeksi perusyhtälöksi:

1) $\quad 2^x \approx 3{,}561 \mid$ Otetaan luonn. log

$$x \ln 2 \approx \ln 3{,}561 \;\therefore\; \underline{\underline{x \approx 1{,}83}}.$$

2) $\quad 2^x \approx -0{,}561.\quad$ Ei ratkaisua, sillä 2^x on aina > 0.

Logaritmin määritelmästä seuraa myös laskutapa *"perusmuotoisen"* ***logaritmiyhtälön*** ratkaisemiseksi: $\boldsymbol{\log_k x = a \Leftrightarrow x = k^a}$. Erityisesti

$$\boxed{\ln x = a \Leftrightarrow x = e^a} \quad \text{ja} \quad \boxed{\lg x = a \Leftrightarrow x = 10^a}.$$

Esim. 7 $\quad 2{,}76 \log_2 3x = 4{,}88$

$$\log_2 3x = 1{,}768...$$

$$3x = 2^{1{,}768...} \;\therefore\; x = 1{,}135... \approx 1{,}14.$$

Esim. 8 $\quad \ln(x+3) = 5 \Leftrightarrow x + 3 = e^5 \Leftrightarrow x = e^5 + 3 \approx 151.$

Jos logaritmiyhtälössä on useampia kuin yksi logaritmi, nämä pyritään yhdistämään, jolloin päästään perusmuotoiseen yhtälöön. Yhdistämisessä (ts. logaritmien laskulakien käyttämisessä "takaperin") voi mukaan tulla vieraita juuria, kuten seuraava esimerkki osoittaa. Siksi tällaisissa yhtälöissä *juuret on syytä tarkistaa.*

Esim. 9

$$\lg(x-3) = \lg x + 2$$

$$\lg(x-3) - \lg x = 2$$ | täytyy olla $x-3>0$ ja $x>0$ $\therefore \underline{x>3}$

$$\lg\frac{x-3}{x} = 2$$ | nyt vaaditaan vain se, että $x-3$ ja x ovat samanmerkkisiä, joten juuria on voinut tulla yhdistämisessä lisää

$$\frac{x-3}{x} = 10^2$$

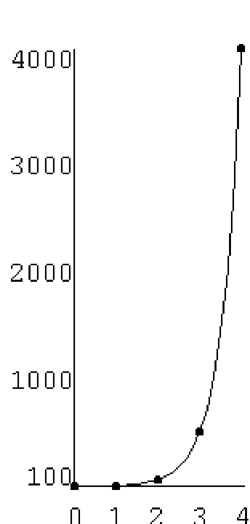
$$x-3 = 100x$$

$$99x = -3$$

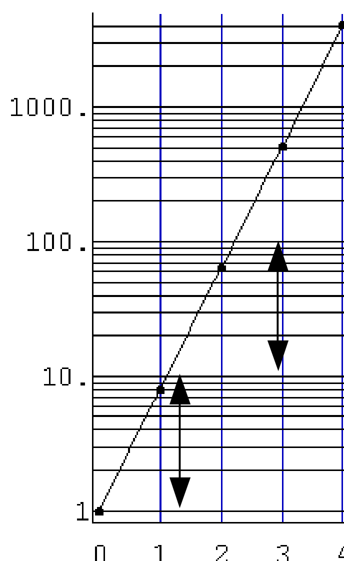
$x = -1/33$. Tämä ei käy (ehto $x>3$ ei täyty)

$\therefore$ ei ratkaisua.

5.3 Logaritminen asteikko



Piirretään funktion $y = 8^x$ kuvaaja välillä $0\ldots4$. Jos kuvaajaan halutaan erityisesti näkymään x:n arvoja 0, 1, 2, 3 ja 4 vastaavat pisteet $(0,1)$, $(1,8)$, $(2,64)$, $(3,512)$, $(4,4096)$, niin se ei onnistu kovinkaan hyvin *tasavälistä* y-asteikkoa käyttäen. Tämä johtuu siitä, että y:n arvojen vaihtelut ovat suuret, joten y-akselin yksikköjanasta tulee väkisinkin erittäin lyhyt ja siten kolme ensimmäistä y:n arvoa 1, 8 ja 64 eivät erotu kuvassa toisistaan juuri ollenkaan. Kuvasta on graafisesti mahdoton määrittää, mikä on esim. arvoa $x = 1{,}2$ vastaava y:n arvo.



Jos sen sijaan y-asteikosta tehdään ylöspäin tihenevä sillä tavoin, että peräkkäiset 10:n potenssit

$$1 = 10^0, 10 = 10^1, 100 = 10^2, 100 = 10^3, \ldots$$

ovat asteikolla tasavälein, niin kaikki (x, y)-parit saadaan erottumaan paremmin. Näiden 10:n potenssien välistä etäisyyttä sanotaan *y-asteikon* ***moduuliksi*** (*mittajanaksi*). Viereiseen kuvaan on merkitty nuolilla kaksi yhden moduulin pituista väliä.

Asteikko on ylöspäin nopeasti tihenevä, koska esim. välit 1…10 (= 9 yksikköä) ja 100…1000 (= 900 yks.) ovat kumpikin yhden moduulin pituisia.

Logaritmien laskulakien mukaan

$$\lg 10^n = n \lg 10 = n \cdot 1 = n\,.$$

Jos moduulin pituus on M (esim. 40 *mm*), niin lukema $a = 10^n$ tulee etäisyydelle $M \cdot \lg a = M \cdot n$ origosta (x-akselista).

Esim. lukema $1000 = 10^3$ tulee etäisyydelle 3M origosta ja lukema $0{,}01 = 10^{-2}$ "etäisyydelle" –2M origosta, negatiiviselle puolelle.

Määritetään asteikon muidenkin lukemien paikat samalla säännöllä:

Jos asteikon moduulin pituus on M, niin asteikko laaditaan siten, että lukema a tulee etäisyydelle

$$\boxed{\boldsymbol{A = M \cdot \lg a}}$$

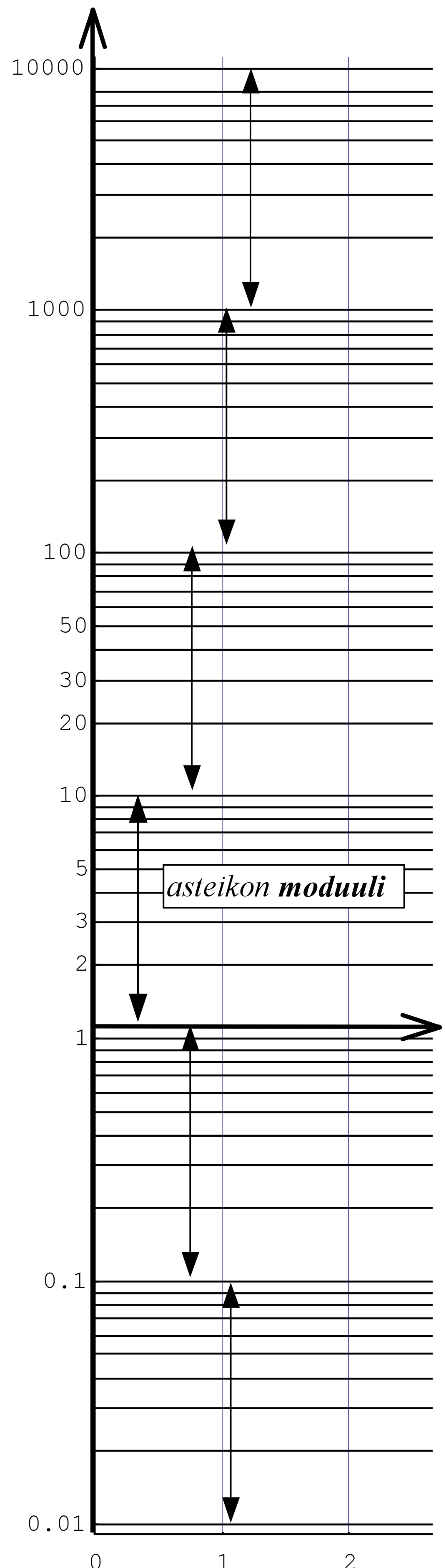
origosta (johon tulee lukema 1).

Tällaista asteikkoa sanotaan ***logaritmiseksi asteikoksi***. Moduulin pituutta M muuttamalla voidaan muuttaa asteikon kokoa.

Esim. lukema 2 tulee etäisyydelle $M \cdot \lg 2 \approx 0{,}30M$ origosta. Koska

$$\lg 20 = \lg(10 \cdot 2) = \lg 10 + \lg 2$$
$$= 1 + \lg 2,$$

niin lukema 20 tulee yhtä moduulia kauemmas. Siis lukemien 1 ja 2 väli on sama kuin lukemien 10 ja 20 ja yleisesti ***yhden moduulin pituiset jaksot toistuvat***

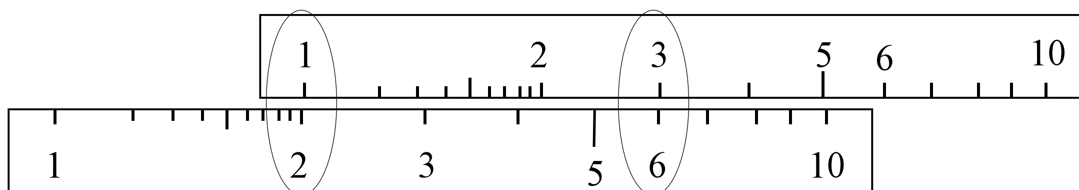


ja jaksojen alkuina ovat peräkkäiset 10:n potenssit (vrt. edellinen kuva).

Tästä seuraa, että ***origon kohdalla voi esiintyä mikä tahansa 10:n kokonaispotensseista***, esim. $0{,}001 = 10^{-3}$, *mutta ei esim. luku* 2 *tai* 50.

Huomaa, että ***lukemaa 0 asteikolta ei löydy***, vaan se on "äärettömän kaukana negatiivisessa suunnassa".

Esimerkiksi ***laskutikun*** asteikot ovat logaritmisia ja sen sijaan, että kerrottaisiin vaikkapa luvut $a = 2$ ja $b = 3$ keskenään, laskutikkua käytettäessä lasketaankin itse asiassa näiden lukujen logaritmit yhteen laskulain $\lg ab = \lg a + \lg b$ mukaisesti, ts. asetetaan 1-kohdasta mitatut etäisyydet $A = \lg a$ ja $B = \lg b$ moduulia, peräkkäin seuraavasti:



5.4 Logaritmipaperit

Millimetripaperin tapaista paperia, jossa molemmat asteikot ovat logaritmisia, sanotaan ***logaritmipaperiksi***. Jos toinen asteikko (y) on logaritminen ja toinen tasavälinen, kyseessä on ***½-logaritmipaperi***.

Sivun 40 lopussa on kuva, jossa eksponenttifunktion $y = 8^x$ viisi pistettä $(0,1)$, $(1,8)$, $(2,64)$, ... on merkitty 1/2-logaritmipaperille. Pisteet sijaitsevat samalla suoralla. Todistetaan tämä yleisesti:

Lause *Eksponenttifunktion* $y = a\,k^{bx}$ *kuvaaja on 1/2-logaritmipaperilla suora viiva.*

**Tod.*: Jos yksikkönä on moduuli, niin lukeman y etäisyys origosta on

$$\begin{aligned} Y = \lg y = \lg(a\,k^{bx}) &= \lg a + \lg k^{bx} \\ &= \lg a + bx \lg k \quad \big|\ \text{merk. } b\lg k = c, \lg a = d \\ &= c\,x + d. \end{aligned}$$

Täten funktion arvon y etäisyys origosta eli Y (eli $\lg y$) muuttuu lineaarisesti x:n funktiona, kuten väitettiin.

*Vastaavasti voitaisiin todistaa, että *potenssifunktion* $y = a\,x^k$ *kuvaaja on "täyslogaritmipaperilla", jossa molemmat asteikot ovat logaritmisia, suora viiva.*

Sovelluksissa kantalukuna k on yleensä e tai 10 ja edellisen lauseen tulosta käytetään esimerkiksi seuraavasti.

Esim. 10 Tutkittavana on eksponentiaalinen laki $y = a\,e^{bx}$, missä kertoimet a ja b ovat tuntemattomia ja ne pitäisi määrittää kokeellisilla mittauksilla.

$$y = a\,e^{bx} \quad \Big| \text{ otetaan 10-kantainen logaritmi yhtälön kummastakin puolesta}$$

$$\lg y = \lg a + bx\lg e \quad \Big| \text{ merk. } b\lg e = c,\ \lg a = d \quad \therefore a = 10^d,\ b = c/\lg e$$

$$\lg y = cx + d.$$

Kun käytetään ½-logaritmipaperia (y-asteikko logaritminen), niin eksponenttifunktion $y = a\,e^{bx}$ eli funktion $\lg y = cx + d$ kuvaaja on suora viiva, ja suoran piirtämiseen riittää, että tunnetaan sen kaksi pistettä (x_1, y_1) ja (x_2, y_2). Näiden avulla saadaan suoran kulmakerroin c. Suoran kuvaajasta saadaan leikkauskohta d y-akselin kanssa. Tämän jälkeen eksponenttifunktion kertoimet a ja b saadaan yhtälöistä $a = 10^d$, $b = c/\lg e$.

5.5 Viivojen parametriesityksiä

Esim. 11 Yhtälöpari

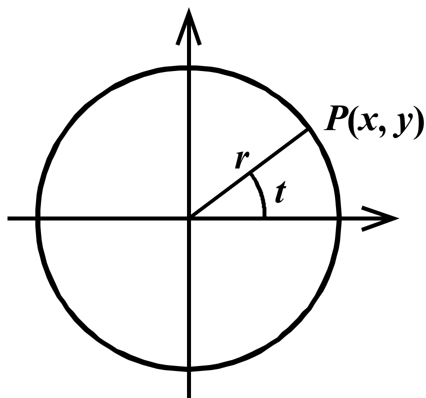
$$+\begin{cases} x = -3 - 2t & |\cdot 2 \\ y = \ \ 5 + 4t & |\cdot 1 \end{cases}$$

esittää erästä ***suoraa*** parametrimuodossa, parametrina t, sillä kun yhtälöparista eliminoidaan t esim. yhteenlaskukeinolla, saadaan yhtälö $2x + y = -1$.

Yleisesti *suoran parametriyhtälöt ovat 1. astetta.* Antamalla parametriesityksessä t:lle arvoja saadaan suoran pisteitä.

Esim.12 Yhtälöt $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t^2 + 3t + 6 \end{cases}$ esittävät erästä ***paraabelia*** parametrimuodossa. Jos nimittäin t eliminoidaan, saadaan yhtälöksi sievennysten jälkeen $y = x^2 - x + 4$.

Esim. 13 Origokeskiselle r-säteiselle ***ympyrälle*** saadaan parametriesitys, kun valitaan parametriksi ympyrän yleisen pisteen $P(x, y)$ ja positiivisen x-akselin välinen vaihekulma t:



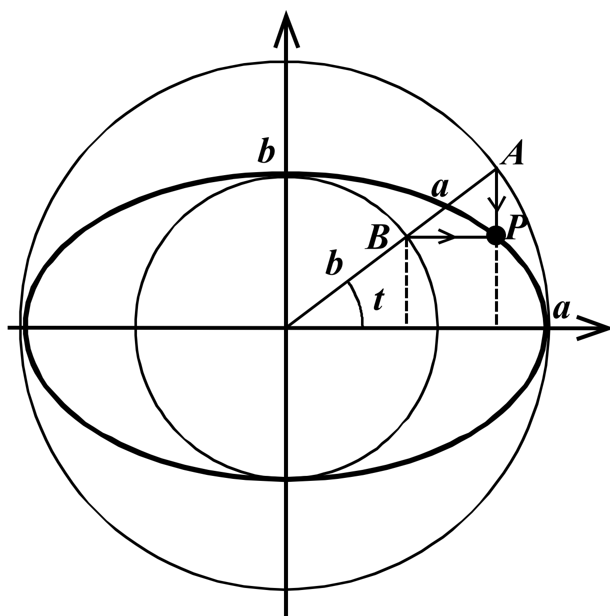
$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{x = r \cos t} \\ \boldsymbol{y = r \sin t} \end{cases}}, \quad 0 \le t < 2\pi .$$

Parametri saataisiin eliminoitua neliöön korotuksella ja yhteenlaskulla:

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2.$$

Esim. 14 ***Ellipsin***, jonka puoliakselit ovat a ja b, parametriesitys on

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{x = a \cos t} \\ \boldsymbol{y = b \sin t} \end{cases}}, \quad 0 \le t < 2\pi .$$



**Tod.* Käytetään apuna a- ja b-säteisiä ympyröitä seuraavasti:

Piirretään origosta lähtevä säde, vaihekulmana t. Se leikkaa a-säteisen ympyrän pisteessä A ja b-säteisen pisteessä B. Vedetään pisteestä A pystysuora- ja pisteestä B vaakasuora viiva. Näiden viivojen leikkauspisteen P koordinaatit ovat

$$\begin{cases} x = a \cos t \quad (= A\text{:n } x\text{-koord.}) \\ y = b \sin t \quad (= B\text{:n } y\text{-koord.}) \end{cases}$$

Tämä piste P on ellipsillä, sillä t saadaan eliminoitua seuraavasti:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \cos t \\ \dfrac{y}{b} = \sin t \end{cases} \quad \Bigg| \begin{array}{l} \text{korotetaan yhtälöt neliöön} \\ \text{ja lasketaan sitten yhteen} \end{array}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Kun t:lle annetaan arvot 0:sta 2π:hin, niin piste P kiertää koko ellipsin kehän (aluksi 1. neljänneksessä t-säteeseen nähden jäljessä, sitten 2. neljänneksessä säteen suuntaan nähden edellä jne.).

Esim. 15 Lisäämällä ellipsin parametriesitykseen vakiot, saadaan ellipsi, jonka keskipiste ei ole enää origossa, esim.

$$\begin{cases} x = 2 + 3\cos t \\ y = -1 + 2\sin t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-2}{3} = \cos t \\ \dfrac{y+1}{2} = \sin t \end{cases} \quad \Bigg| \begin{array}{l} \text{korotetaan neliöön ja} \\ \text{lasketaan sitten yhteen} \end{array}$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1.$$

Kyseessä on siis ellipsi, jonka $kp = (2,-1)$ ja $a = 3, b = 2$.

*Hyperbelille saataisiin parametriesitys esim. ns. ***hyperbelifunktioiden*** $\sinh x$ (lue: "hyperbelisini x") ja $\cosh x$ avulla:

(2) $$\begin{cases} x = \pm a \cosh t \\ y = \pm b \sinh t \end{cases} \quad (0 \le t < \infty).$$

*Hyperbelifunktiot ovat eräitä eksponenttifunktioyhdelmiä:

$$\sinh x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

mutta niiden laskulait ovat merkkieroja lukuun ottamatta samantapaisia kuin trigonometriassa, esim.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \ \ (\text{vrt. } \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1).$$

Eliminoi tämän laskulain avulla parametri t yhtälöistä (2).

Eräät tekniikassa esiintyvät käyrät (mm. *sykloidit*) esitetään yleensä parametrimuodossa. Joissakin tapauksissa parametrin eliminointi on vaikeaa tai jopa mahdotonta. Ohjelmoinnissa parametrimuoto on usein tavanomaista esitystä parempi.

Harjoituksia

A

5.1 Laske lineaarisella interpoloinnilla:

a) $f(3{,}27)$, kun $f(3{,}20) = 4{,}55$ ja $f(3{,}30) = 4{,}76$.

b) x, kun $f(2{,}40) = 3{,}11$, $f(2{,}50) = 3{,}28$ ja $f(x) = 3{,}22$.

5.2 Ratkaise:

a) $4{,}96 \cdot e^{t-1} = 5{,}86$ b) $4{,}70 \cdot 5^{3x} = 1{,}19$ c) $10^{2x} = 9 \cdot 10^{-6}$.

5.3 Ratkaise:

a) $\ln(t+1) = 2$ b) $3{,}21 \cdot \lg 2x = 0{,}210$ c) $\lg x + \lg(x-2) = 1$.

5.4 Piirrä logaritminen asteikko välillä $1 \ldots 100$, moduulina 100 mm. Merkitse asteikolle näkyviin lukemat

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100.

5.5 Muodosta edellisen tehtävän tulosten avulla ½-logaritminen $(x, \lg y)$-asteikko ja piirrä siihen eksponenttifunktion $y = 2 \cdot e^{0{,}38x}$ kuvaaja välillä $0 \le x \le 10$.

5.6 *a) Piirrä a- ja b-säteisten ympyröiden avulla ellipsi, kun $a = 30$ mm (= x-akselin suuntainen puoliakseli) ja $b = 50$ mm. b) Mikä on tämän ellipsin parametriesitys. c) Eliminoi t.

B

5.7 Laske a) lineaarisella interpoloinnilla x, kun $f(2{,}46) = -13{,}11$, $f(2{,}47) = -13{,}28$ ja $f(x) = -13{,}21$, b) lineaarisella ekstrapoloinnilla $f(3{,}2)$, kun $f(2{,}0) = 3{,}60$ ja $f(3{,}0) = 2{,}70$.

5.8 Laske z lineaarisella interpoloinnilla tai ekstrapoloinnilla seuraavissa kahden muuttujan x ja y taulukoissa:

a)

$x \backslash y$	2,3	2,35	2,4
24,5	7,43	7,22	
24,53		z	
24,6	9,21		8,43

b)

$x \backslash y$	2,31	2,32	2,326
4,1	11,32	12,34	
4,13			z
4,2	10,71	11,51	

5.9 Maapallon väkiluku oli v. 1940 kaksi miljardia ja vuonna 1976 neljä miljardia. Jos väkiluvun kasvu oletetaan eksponentiaaliseksi (ts. väkiluku n noudattaa lakia $n = ae^{bt}$), niin mikä arvio saadaan väkiluvulle v. 2000 (a:n ja b:n määräämiseksi saat yhtälöparin).

5.10 Kun kappale jäähtyy, niin kappaleen ja ympäristön lämpötilaero $T - T_y$ vähenee eksponentiaalisesti lain

$$T - T_y = (T_0 - T_y)e^{-kt}$$

mukaisesti. Tässä T_0 on alkulämpötila (jollakin alkumittaushetkellä, esim. klo 12).

a) Määritä jäähtymisvakio k, kun ympäristön lämpötila on koko ajan $20\,°C$, alkulämpötila on $60\,°C$ ja 30 min kuluttua lämpötila on $40\,°C$.

b) Laske, kuinka pitkän ajan kuluttua lämpötila on $25\,°C$?

5.11 Ratkaise:

a) $5^{x+1} = 3 \cdot 2^x$, b) $2^x \cdot 3^{x+1} = 1$, *c) $4^x - 2^{x+2} = 1$.

*d) $3^x + 9^{x+1} = 8$ *e) $e^{2\pi\mu} - 0{,}80e^{\pi\mu} = 0{,}90$ (tuntemattomana μ, joka voisi olla esim. köysikitka).

5.12 Ratkaise: a) $\ln(3x-2) = \ln(x+1)$, b) $\ln(3x-2) = \ln(x-1)$,

c) $2\lg(x-1)=\lg(x+2)+1$ d) $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x-1)}=2$.

5.13 a) Muodosta ½-logaritminen ($x, \lg y$)-koordinaatisto, missä x saa arvot $0\ldots20$ ja y arvot $10^{-1}\ldots100$, moduulina 80 mm.

b) Piirrä tähän koordinaatistoon käyrä $y=2\cdot e^{-0,1x}$, $0\le x\le 20$.

c) Ratkaise edellisen käyrän avulla yhtälö $2\cdot e^{-0.1x}=0,8$.

d) Ratkaise graafisesti em. koordinaatistossa yhtälö

$$2\cdot e^{-0.1x}=0,1\cdot 2,1^{0,35x}.$$

5.14 Ratkaise algebrallisesti edellinen yhtälö $2\cdot e^{-0.1x}=0,1\cdot 2,1^{0,35x}$.

5.15 a) Osoita, että yhtälöt

$$\begin{cases}x=5\cos t\\ y=5\sin t\end{cases},\quad \begin{cases}x=5\sin t\\ y=-5\cos t\end{cases}\quad \text{ja}\quad \begin{cases}x=-5\cos t\\ y=5\sin t\end{cases}$$

esittävät samaa ympyrää. b) Piirrä ympyrä keskimmäisen parametrimuodon mukaisesti, antamalla t:lle arvoja $\pi/6$:n välein (numeroi saadut pisteet).

5.16 *Mikä käyrä on $\begin{cases}x=2-3\sin 2u\\ y=1+2\cos 2u\end{cases}$, $0\le u<\pi$?

C

5.17 *Hyperbelifunktioilla*

$$y=\sinh x=\tfrac{1}{2}\cdot(e^{x}-e^{-x}),\ \ y=\cosh x=\tfrac{1}{2}\cdot(e^{x}+e^{-x}).$$

on kummallakin käyrä $y=\frac{1}{2}e^{x}$ ns. käyräviivaisena asymptoottina, sillä $e^{-x}\approx 0$, kun x on suuri. a) Piirrä tämä asymptoottikäyrä. b) Osoita, että $\sinh x$ on *pariton funktio* ja $\cosh x$ *parillinen funktio*, ts. $\sinh(-x)=-\sinh x$, $\cosh(-x)=\cosh x$. c) Piirrä käyrät $y=\sinh x$ ja $y=\cosh x$. d) Todista, että

$$\sinh 2x=2\sinh x\cdot\cosh x.$$

5.18 Todista, että $x=t+1/t$, $y=t-1/t$ ($t\in\mathbf{R}$) on erään hyperbelin parametriesitys.

6 Epäyhtälöt

6.1 Lineaarinen epäyhtälö ja murtoepäyhtälö

Epäyhtälö on "ulkonäöltään" muuten samanlainen kuin yhtälö, mutta yhtäläisyysmerkin tilalla on jokin "erisuuruusmerkeistä $<$, $>$, $\leq$ tai $\geq$ (tai myös varsinainen erisuuruusmerkki $\neq$). Esimerkkejä:

$2<3$, $2>3$ (tosi epäyhtälö ja epätosi epäyhtälö),

$x+2<x+3$ (identtisesti eli kaikilla x:n arvoilla tosi),

$x+2>x+3$ (epäyhtälöllä ei ole ratkaisuja eli ratkaisujoukko $Rj=\emptyset$),

$2x+1>2$ (ehdollinen epäyhtälö, jonka ratkaisun muod. luvut $x>½$).

Epäyhtälön muokkaamisen perussäännöt esitettiin jo monisteen 1. osassa ja ne ovat seuraavat:

- Epäyhtälön kummallekin puolelle voidaan lisätä (tai niistä vähentää) sama luku. Siten *epäyhtälössä voidaan siirtää termejä puolelta toiselle, kun samalla vaihdetaan niiden etumerkit.*
- *Epäyhtälön kumpikin puoli voidaan kertoa (tai jakaa) samalla* ***positiiviluvulla****.*
- *Epäyhtälön kumpikin puoli voidaan kertoa (tai jakaa)* ***negatiivisella*** *luvulla, mikäli samalla muutetaan erisuuruusmerkin suunta.*

Esim. 1 a) $5x+3\geq 2x-1$

$$3x\geq -4 \,|\, :3>0$$

$$x\geq -1\tfrac{1}{3}.$$

b) $2x-1\leq 5x+3$ (sama epäyhtälö kuin a)-kohdassa)

$$-3x\leq 4 \,|\, :(-3)<0$$

$$x\geq -1\tfrac{1}{3}.$$

Seuraavassa *murtoepäyhtälössä* on x:ää myös nimittäjässä:

Esim. 2 $\frac{2}{x-1} < 3$ | ***Tätä ei saa kertoa (x – 1):llä, koska ei tiedetä, onko x – 1 > 0 vai < 0.***

$\frac{2}{x-1} - 3 < 0$ | Kaikki termit (tässä luku 3) *siirrettiin samalle puolelle. Tehdään termit samannimisiksi*

$\frac{2-3(x-1)}{x-1} < 0$

$\frac{-3x+5}{x-1} < 0$ | $\cdot(-1)$ (jotta osoittajaa on helpompi käsitellä)

$\frac{3x-5}{x-1} > 0$ | Suoritetaan ***merkkitarkastelu***

		1		**5/3**	
$3x-5$	–		–		+
$x-1$	–		+		+
osamäärä	+		–		+
ratkaisut:	═══o				o═════

$(3x-5>0$
$x>5/3)$

$\therefore \underline{\underline{x<1 \text{ tai } x>5/3}}$.

Merkkitarkastelu soveltuu mutkikkaammillekin epäyhtälöille, jos vain epäyhtälön vasen puoli pystytään jakamaan lineaarisiin (ja jaottomiin 2. asteen) tekijöihin.

Esim. 3 $\frac{x^3-4x}{1-x} < 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-2)(x+2)}{1-x} < 0$

		–2		**0**		**1**		**2**	
x	–		–		+		+		+
$x-2$	–		–		–		–		+
$x+2$	–		+		+		+		+
$1-x$	+		+		+		–		–
osamäärä	–		+		–		+		–
ratkaisut:	═══o				o═══o				o═══

$\therefore \underline{\underline{x<-2 \text{ tai } 0<x<1 \text{ tai } x>2}}$,

ts. ratkaisuiksi käyvät kaikki ne x:n arvot, jotka toteuttavat 1. <u>tai</u> 2. <u>tai</u> 3. ehdon.

6.2 Toisen asteen epäyhtälö

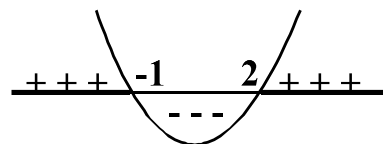
Esim. 4 $x^2 - x - 2 > 0$ | vp:n nollakohdat: $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = 2 \vee -1$

$(x-2)(x+1) > 0$ | merkkitarkastelu

		–1		**2**	
$x-2$	–		–		+
$x+1$	–		+		+
tulo	+		–		+
ratkaisut:	════o				o════

$\therefore \underline{\underline{x < -1 \text{ tai } x > 2}}.$

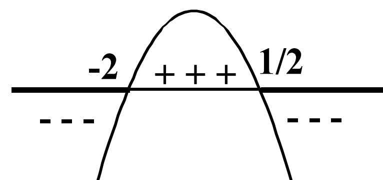
Toinen tapa: Funktion $y = x^2 - x - 2$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joka leikkaa x-akselin kohdissa –1 ja 2. Siten



$y > 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x < -1 \text{ tai } x > 2}}.$

Esim. 5 $-2x^2 - 3x + 2 > 0$ | vastaavan yhtälön 0-kohdat $\frac{1}{2}$ ja -2

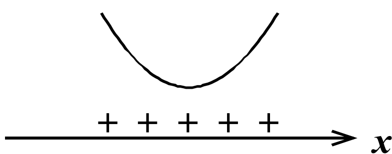
Paraabeli $y = -2x^2 - 3x + 2$ on alaspäin aukeava, joten y on positiivinen nollakohtien välissä:



$\underline{\underline{-2 < x < \tfrac{1}{2}}}.$

Esim. 6 $x^2 + x + 2 > 0$

Vastaavalla yhtälöllä ei ole reaalijuuria (sillä sen diskriminantti on $1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 < 0$). Koska paraabeli $y = x^2 + x + 2$ on ylöspäin aukeava, kaikki y:n arvot ovat > 0. Siten epäyhtälö on <u>identtinen eli voimassa kaikilla x:n arvoilla</u> (eli ratkaisujoukko Rj = **R**).



Esim. 7 $x^2 + x + 2 \leq 0$. Sama paraabeli kuin edellä. Koska y ei ole millään x:n arvolla ≤ 0, niin epäyhtälöllä <u>ei ole ratkaisuja</u>.

6.3 Itseisarvoepäyhtälöt

Perustyyppejä on kaksi kuten jo monisteen 1. osassa mainittiin:

- $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$ (luvun itseisarvo on < *b*, jos luku on –*b*:n ja *b*:n välillä)
- * $|a| > b \Leftrightarrow a > b$ **tai** $a < -b$ (luvun itseisarvo on > *b*, jos luku on *b*:tä suurempi tai –*b*:tä pienempi)

Esim. 8 $|2x-1| < 3$

$$-3 < 2x-1 < 3 \quad | +1$$
$$-2 < 2x < 4 \quad | :2 > 0$$
$$\underline{\underline{-1 < x < 2}}.$$

****Esim. 9*** $|2x-1| > 3$

$2x-1 > 3$ tai $2x-1 < -3$ (epäyhtälö hajosi kahdeksi erilliseksi epäyhtälöksi)

$2x > 4$ tai $2x < -2$

$\therefore \underline{\underline{x > 2 \text{ tai } x < -2}}$.

*Esimerkkiä 8 laskettaessa saatiin ***kaksoisepäyhtälö*** $-3 < 2x-1 < 3$, joka ratkesi yksinkertaisesti lisäämällä siihen 1 ja jakamalla tulos 2:lla. Seuraavan esimerkin kaksoisepäyhtälö $-x < 2-3x < x$ ei ratkea näin yksinkertaisesti.

****Esim. 10*** $|2-3x| < x$ (samaa tyyppiä kuin Esim. 8)

$-x < 2-3x < x$ | *kaksoisepäyhtälö;* ratkaistaan kumpikin osa erikseen. Vastaukseen tulevat näiden osien ***yhteiset*** ratkaisut.

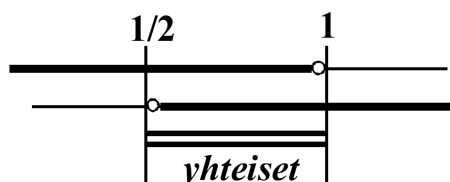
$-x < 2-3x$ ***ja*** $2-3x < x$ (*x*:n täytyy täyttää 1. ***ja*** 2. ehto)

$2x < 2$ ***ja*** $-4x < -2 \quad | :(-4) < 0$

$x < 1$ ***ja*** $x > \frac{1}{2}$ (näistä etsitään yhteiset arvot)

Yhteiset arvot:

$\underline{\underline{1/2 < x < 1}}$.



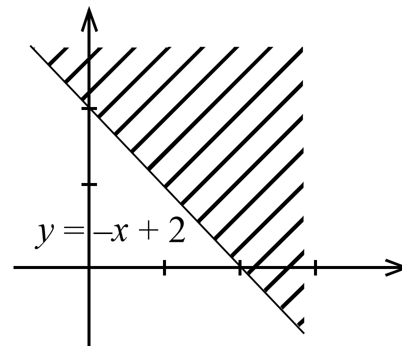
6.4 Kahden tuntemattoman epäyhtälö. Epäyhtälöryhmä

Jos epäyhtälössä on kaksi tuntematonta (x ja y), ratkaisujoukon kuvaamiseen ei riitä enää lukusuora tai sen osa, vaan ratkaisut muodostavat jonkin alueen 2-ulotteisessa avaruudessa (xy-tasossa).

Esim. 11 $x + y > 2$

$\therefore\ y > -x + 2$.

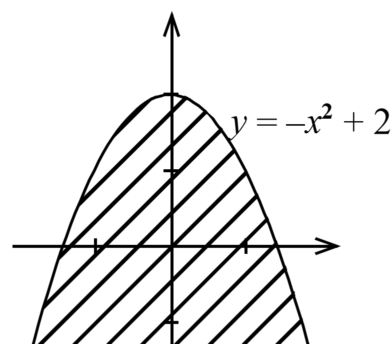
Ratkaisuina ovat kaikki suoran $y = -x + 2$ yläpuolella olevat pisteet.



Esim. 12 $x^2 + y \le 2$

$\therefore\ y \le -x^2 + 2$.

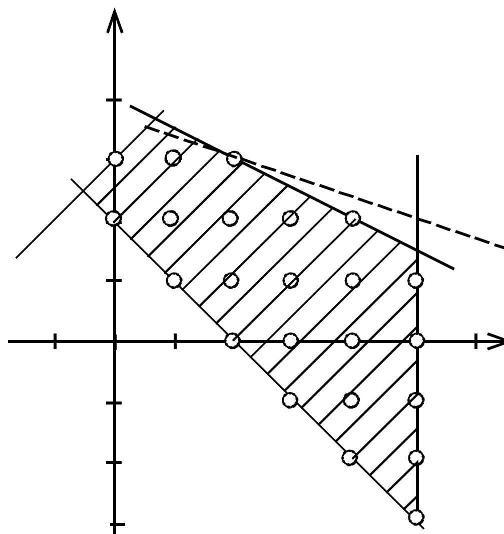
Ratkaisuina ovat paraabelin $y = -x^2 + 2$ alapuolella (sisällä) ja "reunalla" olevat pisteet.



Seuraavan epäyhtälöryhmän ratkaisut muodostuvat erään ***kuperan*** eli ***konveksin*** monikulmion sisäosasta ja reunasta:

Esim. 13 $\begin{cases} x + y - 2 \ge 0 \\ x - y + 3 \ge 0 \\ x + 2y - 8 \le 0 \\ x - 5 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge -x + 2 \\ y \le x + 3 \\ y \le -½ \cdot x + 4 \\ x \le 5 \end{cases}$ (vrt. seuraava kuva).

Voidaan myös kysyä tämän ryhmän ***kokonaislukuratkaisuja***. Viereisen kuvan mukaan tällaisia ratkaisuja on 23 kpl: (0,2), (0,3), (1,1), ...



****Esim. 14 (Lineaarinen optimointi)***

Mikä edellisistä (x, y)-pareista (*verkkopisteistä*) antaa funktiolle

(1) $z = x + 3y$

suurimman arvon ja mikä tämä suurin arvo z_{max} on?

Lasketaan z:n saama arvo jokaisessa verkkopisteessä (joita oli 23 kpl). Näin todetaan, että piste $(2,3)$ antaa z:n lausekkeelle

(1) $$z = x + 3y$$

maksimiarvon, jonka suuruus on $z_{\max} = 2 + 3 \cdot 3 = 11$.

*Tehtävä voidaan ratkaista myös graafisesti: Kun z:lle annetaan eri arvoja, yhtälö (1) eli yhtälö $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z$ esittää yhdensuuntaisten suorien parvea xy-tasossa. Mitä ylempänä suora kulkee, sitä suurempi z:n arvo on (sillä suora leikkaa y-akselin kohdassa $\frac{1}{3}z$). Graafisesti todetaan, että pisteen $(2,3)$ kautta kulkeva parven suora on ylimpänä. Tämä suora on piirretty edelliseen kuvaan katkoviivalla.

Optimaalinen = edullisin; ***optimoida*** = etsiä edullisin vaihtoehto.

*Edellisen esimerkin tapaisiin ***optimointitehtäviin*** joudutaan mm., jos halutaan optimoida jonkin tuotantoyksikön toiminta: halutaan esim. tutkia, kuinka suuret määrät x ja y tämän tuotantoyksikön olisi valmistettava kahta eri tuotetta, jotta niistä saatava voitto olisi mahdollisimman suuri. Tuotantoprosessi asettaa määrille x ja y ehtoja, jotka voidaan usein esittää lineaarisena epäyhtälöryhmänä. Esimerkiksi: 1) tuotteita pystytään valmistamaan päivässä korkeintaan sata kpl: $x + y \leq 100$, 2) tuotemäärien ero ei saa olla yli 10 kappaleen: $x - y \leq 10$, 3) $x, y \geq 0$ (ja kokonaislukuja). Voittofunktio voi olla jokin (1):n tapainen funktio (esimerkiksi $z = (x \cdot 3{,}1 + y \cdot 2{,}7) \cdot 10^3$ euroa).

Matematiikkaohjelmilla voidaan ratkaista myös sellaisia optimointitehtäviä, joissa muuttujia on enemmän kuin kaksi.

Harjoituksia

A

6.1 a) $5 - 7x > 3 - 2(x+1)$, b) $\dfrac{2x+6}{3} < 3x - 1$.

6.2 a) $x + \dfrac{x-1}{2} \geq \dfrac{x+3}{2}$, b) $(2x-1)(x+3) > 0$.

6.3 Ratkaise seuraavat epäyhtälöt esimerkin 2 mukaisesti ts. siirtämällä kaikki termit samalle puolelle ja tekemällä ne sitten samannimisiksi. Varo: x:n tai $x - 3$:n siirtäminen nimittäjästä

toisen puolen osoittajaan on epäyhtälöillä kiellettyä, koska se merkitsee samaa kuin epäyhtälön kertominen x:llä tai $x-3$:lla (ts. kertomista luvulla, josta ei etukäteen tiedetä, onko se positiivinen vai negatiivinen).

a) $\frac{1}{x} < 2$, b) $\frac{2}{x-3} \geq 4$.

6.4 Ratkaise kahdella tavalla (vrt. Esim. 4)

a) $x^2 + 2x - 3 > 0$, b) $3x^2 < 2 - 5x$.

6.5 a) $|2x| < 3$, b) $|5x| \geq 3$,

*c) $|2x+1| < x$, *d) $|x| < 2x+1$,

*e) $|2x-1| > x$, *f) $|x| > 2x-1$.

6.6 Määritä ratkaisujoukko: $\begin{cases} x - y \leq 1 \\ 2x^2 + y \leq 0 \end{cases}$.

B

6.7 a) $\frac{x^2 - x}{x+2} > 0$, b) $\frac{2}{x} > x$.

6.8 a) $2x^2 > x + 1$, b) $4x - 1 > 4x^2$, c) $3x^2 + 2x + \frac{1}{3} > 0$.

d) $3x^2 + 2x + \frac{1}{3} \leq 0$, e) $2x^2 + 3x + \pi > 0$.

6.9 a) $\frac{1}{x} < 2x - 1$, b) $\frac{1-x}{x-3} < \frac{1}{x-1}$.

6.10 a) $|2x-1| < 3 - 4x$, *b) $|2x+3| \geq x - 1$, c) $|4x-1| < 3 - 2x$.

6.11 a) $\left|\frac{2x-1}{3}\right| < 1$, b) $|2x-1| > |x|$ (Ohje: koska epäyhtälön kumpikin puoli on ≥ 0, suuruusjärjestys säilyy vaikka korotat epäyhtälön kummankin puolen toiseen potenssiin. Tämä tosin nostaa epäyhtälön asteen. Käytä apuna tulosta $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.)

6.12 Mikä on epäyhtälön $x^2 + y^2 \leq 4y$ ratkaisujoukko?

6.13 *Ratkaise juuri ennen harjoituksia kuvailtu optimointitehtävä.

6.14 Piirrä käyrä a) $y = |x-1| + 2x$, *b) $y = |x-1| + |x|$, *c) $y = |x^2 - 4|$.

C

6. 15 Ratkaise: a) $|2x^2 - 1| > |x|$ (vrt. 6.11 b)-kohta),

b) $|x^2 - x - 5| < |x^2 - 2x|$.

6.16 Millä x:n arvoilla funktio $\dfrac{\sqrt{2x-3}}{x-2} + \dfrac{\sqrt{3x-2}}{x+2}$ ei ole määritelty?

6.17 Millä a:n arvoilla epäyhtälö $(x+a)(x-1)+2>0$ on identtinen?

6.18 Mitkä x:n arvot toteuttavat epäyhtälöparin $\begin{cases} 3(x-3) > 5(x-1) \\ x^2 + 3x - 4 > 0 \end{cases}$?

6.19 Ratkaise: a) $\left|\dfrac{2x-1}{x}\right| < 1$, b) $\left|\dfrac{x^2+2}{x^2-3}\right| > 1$.

7 Likiarvoista

7.1 Ylä- ja alalikiarvo

Likiarvojen yhteydessä joudutaan usein epäyhtälöihin. Koska mittaustulosten antamien likiarvojen virheiden arviointi ja arvioinnissa käytettävien laskusääntöjen ymmärtäminen sekä sanontojen tunteminen on käytännön kannalta tärkeää, asiaa käsitellään seuraavassa hyvin yksityiskohtaisesti, alkeista alkaen. Myöhemmin esitetään ns. kokonaisdifferentiaaliin perustuva menetelmä virheiden arvioimiseksi.

Esim. 1 Jos tiedetään, että a, b ja c ovat seuraavilla väleillä:

$$23 < a < 25, \quad 49 < b < 52, \quad 8 < c < 9,$$

niin suureelle $z = \dfrac{a}{b-2c}$ saadaan ***ylälikiarvo***, kun osoittajalle valitaan mahdollisimman suuri arvo 25 ja nimittäjälle $b-2c$ mahdollisimman pieni arvo. Tämä erotus on pienimmillään, kun b on mahdollisimman pieni, siis 49 ja siitä vähennetään pois mahdollisimman paljon eli $2 \cdot 9$. Siten

$$z = \frac{a}{b-2c} < \frac{25}{49-2\cdot 9} = \frac{25}{31} = 0{,}8064... < 0{,}807 \quad (\textit{ylälikiarvo}).$$

Vastaavasti saadaan ***alalikiarvo***:

$$z = \frac{a}{b-2c} > \frac{23}{52-2\cdot 8} = \frac{23}{36} = 0{,}6388... > 0{,}638 \quad (\textit{alalikiarvo}).$$

Näin saadaan z:lle rajat $0{,}638 < z < 0{,}807$.

Esim. 2 Jos mittaustulos esitetään muodossa

$$s = (21{,}4 \pm 0{,}3)\ \text{m},$$

merkitsee se, että suureen s oikea lukuarvo on välillä

$$21{,}4 - 0{,}3 \le s \le 21{,}4 + 0{,}3$$

eli välillä $21{,}1 \le s \le 21{,}7$. Täten *s :n arvo on* ***vähintään*** 21,1 ja ***korkeintaan*** 21,7. Voidaan myös sanoa, että s:n (absoluuttinen) ***virhe*** $\boldsymbol{\Delta s}$ on välillä

$$-0{,}3 \le \Delta s \le 0{,}3.$$

Tämä voidaan esittää itseisarvojen avulla muodossa

$$|\Delta s| \leq 0,3 .$$

Siis *s*:n virhe on *itseisarvoltaan korkeintaan* 0,3.

Suureen *s* likiarvon $s' = 21,4$ ***suhteellinen virhe*** on

$$\frac{\Delta s}{s} \approx \frac{\Delta s}{s'} .$$

Tässä tapauksessa pystytään laskemaan vain suhteellisen virheen itseisarvolle yläraja:

(2) $$\left|\frac{\Delta s}{s}\right| \leq \frac{0,3}{21,4} = 0,014... < 0,02 = 2\,\% .$$

Siis *s*:n arvossa on virhettä *korkeintaan 2 % "puoleen tai toiseen" (alas- tai ylöspäin)*.

Huom.: Virheen itseisarvolle saatua ylärajaa 0,014... et saa pyöristää alaspäin 0,01:ksi eli 1 %:ksi, sillä et voi sanoa, että virhettä on (itseisarvoltaan) korkeintaan 1 %, koska sitä voi olla enemmän: 1,4...%. Jos oltaisiin tarkkoja, niin ylärajaa (2) laskettaessa nimittäjässä pitäisi käyttää *s*:n mahdollisimman pientä arvoa 21,1:

$$\left|\frac{\Delta s}{s}\right| \leq \frac{0,3}{21,1} = 0,014... < 0,02 = 2\,\%$$

Koska kuitenkin ero on vasta kolmannessa numerossa ja virhe esitetään yleensä yhden numeron tarkkuudella, niin tällä ei ole vaikutusta lopputulokseen.

Esim. 3 Jos jossakin tehtävässä annetaan likiarvo ilman virherajoja, esim.

$$s \approx 21,4 \qquad (\text{tai esim. } s = 21,4\ km),$$

niin oletetaan, että viimeinen numero 4 on katkaisun tulos. Tarkempi arvo on siis voinut olla esim.

21,35, 21,36, ... 21.40, 21.41, ... 21,44, 21,4499...

ts. *s*:n arvossa on virhettä korkeintaan 5 sadasosaa puoleen tai toiseen:

$$s \approx 21,4 \quad \text{ja} \quad |\Delta s| \leq 0,05$$

eli

$$s = 21{,}4 \pm 0{,}05\,.$$

7.2 Summan ja erotuksen virhe

Yleisesti a:n likiarvon a' ***absoluuttinen virhe*** on

$$\boxed{\Delta a = a' - a} \quad \text{(näin päin!)}$$

*Täten oikea arvo

$$a = a' - \Delta a\,.$$

*Muistisääntö: *oikea arvo saadaan kun likiarvosta otetaan virhe* <u>*pois*</u> (virhe vähennetään). Mittalaitteiden systemaattisen virheen yhteydessä ilmoitetaan joskus ns. ***korjaus***, joka on virheelle vastakkainen, ts.

$$\mathbf{a = a' + korjaus}$$

*Siis oikea arvo saadaan kun likiarvoon tehdään (lisätään) korjaus.

Lause 1 *Summan abs. virhe = termien abs. virheiden summa:*

$$\boxed{\Delta(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \Delta\boldsymbol{a} + \Delta\boldsymbol{b}}$$

Vastaavasti

$$\Delta(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \Delta\boldsymbol{a} - \Delta\boldsymbol{b}$$

$$\Delta(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{t}\cdot\Delta\boldsymbol{a} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Tod.: $\Delta(a+b) = (a'-b') + (a-b) = a' - a + b' - b = \Delta a + \Delta b\,.$
Vastaavasti todistetaan muut.

Esim. 4

$$\begin{cases} \pi = 3{,}142 & \Delta\pi = 3{,}142 - 3{,}14159\ldots \approx \;\; 0{,}00040 \\ e = 2{,}718 & \Delta e = 2{,}718 - 2{,}71828\ldots \approx -0{,}00028 \end{cases}$$

$$\pi - e \approx 0{,}424 \qquad\qquad virhe \approx 0{,}00068 \approx 0{,}0007.$$

Tässä lähtöarvot π ja e esitettiin tuhannesosien tarkkuudella, jolloin kummassakin arvossa virhettä on korkeintaan suurimman katkaisuvirheen 0,0005 verran (puoleen tai toiseen). *Erotuskin on syytä ilmaista tuhannesosien tarkkuudella*, vaikkakin yllä todettiin, että siinä on virhettä enemmän kuin katkaisuvirheen 0,0005 verran. Likiarvon 0,424 viimeinen numero ei siten ole ns. ***oikea numero*** (ts. paras mahdollinen) mutta kylläkin ns. ***merkitsevä numero***: se poikkeaa vain jonkin verran oikeasta

numerosta ja siten sen mukaan ottaminen likiarvoon 0,424 antaa paremman kuvan likiarvosta kuin sen poisjättäminen ja likiarvon esittäminen muodossa 0,42. Oikea kolmidesimaalinen likiarvo olisi 0,423 (≈ 0,424 – 0,0007).

*Jos ei tiedetä, onko virhe positiivinen vai negatiivinen, on käytettävä itseisarvoja seuraavasti:

Lause 2 $|\Delta(a \pm b)| \le |\Delta a| + |\Delta b|$,

$$|\Delta(t \cdot a)| = t \cdot |\Delta a| \quad (t \in \mathbf{R}^+).$$

*Huomaa, että erotuksellakin tulee epäyhtälön oikealle puolelle + eikä –, koska *a*:n ja *b*:n virheet voivat olla erimerkkiset ja siten vahvistaa toisiaan (kuten edellisessä esimerkissä).

**Esim. 5*

$$\begin{cases} a = 2{,}76 \pm 0{,}01 \\ b = 3{,}14 \pm 0{,}02 \end{cases} \qquad \text{Täten} \begin{cases} |\Delta a| \le 0{,}01 \\ |\Delta b| \le 0{,}02 \end{cases}$$

$$a - b = -0{,}62 \qquad |\Delta(a-b)| \le 0{,}03$$

$$\therefore a + b = 5{,}90 \pm 0{,}03 \quad \text{ja} \quad a - b = -0{,}62 \pm 0{,}03.$$

**Esim. 6* $a \approx 2{,}76, \quad b \approx 3{,}14 \quad \therefore |\Delta a| \le 0{,}005, \quad |\Delta b| \le 0{,}005$

$$\therefore a + b \approx 5{,}90 \quad \text{ja} \quad 5a \approx 13{,}80$$

$$|\Delta(a+b)| \le 0{,}01 \quad \text{ja} \quad |\Delta(5a)| = 5 \cdot |\Delta a| \le 0{,}025 < 0{,}03$$

$$\therefore a + b = 5{,}90 \pm 0{,}01 \quad \text{ja} \quad 5a = 13{,}80 \pm 0{,}03.$$

Lopputulokset on siis syytä ilmoittaa sadasosien tarkkuudella, vaikka sadasosissa voi olla muutaman numeron heitto.

Yleisesti käytetään seuraavanlaista ***nyrkkisääntöä***:

> *Jos likiarvoja **lasketaan yhteen tai vähennetään**, niin se likiarvoista, joka on **desimaalipilkun kohtaan nähden epätarkin**, määrää tuloksen katkaisukohdan.*

Esim. *7* Seuraavassa lasketaan *likiarvoja* yhteen:

a) $1{,}74 + 15{,}7 + 0{,}13 = 17{,}57 \approx 17{,}6$ (keskimmäinen likiarvo tunnetaan vain kymmenesosien tarkkuudella, joten lopputuloskin on esitettävä samalla tarkkuudella)

b) $75 \text{ m} + 3{,}40 \cdot 10^3 \text{ m} = 75 \text{ m} + 3400 \text{ m} = 3475 \text{ m} \approx 3480 \text{ m}$. Tässä tapauksessa jälkimmäinen likiarvo tunnetaan vain kymmenien metrien tarkkuudella, joten lopputuloskin on esitettävä samalla tarkkuudella.

Huomaa, että 10^3:n avulla esitettynä likiarvo on desimaalimuotoinen, jolloin siitä näkyy tarkkuus. Sen sijaan esityksestä 3400 m ei näy tarkkuus (ilman katkoviivaa tms.).

7.3 Tulon, osamäärän ja potenssin virhe

***Lause 3** *Tulon absoluuttinen virhe on*

(3)
$$\Delta(ab) = \Delta a \cdot b + a \cdot \Delta b + \Delta a \cdot \Delta b\,.$$

***Tod.:** Seuraavassa käytetään esim. tietoa $a = a' - \Delta a$ (ts. oikea arvo saadaan, kun likiarvosta poistetaan virhe) muodossa $a' = a + \Delta a$.

$$\begin{aligned}\Delta(ab) &= a'b' - ab \\ &= (a + \Delta a)(b + \Delta b) - ab \\ &= ab + a \cdot \Delta b + \Delta a \cdot b + \Delta a \cdot \Delta b - ab \\ &= \Delta a \cdot b + a \cdot \Delta b + \Delta a \cdot \Delta b.\end{aligned}$$

*Kun tulon virhettä käsitellään, lasketaan tavallisesti absoluuttisen virheen sijasta suhteellinen virhe. Jaetaan yhtälön (3) kumpikin puoli tulolla *ab*:

$$\frac{\Delta(ab)}{ab} = \frac{\Delta a \cdot b}{ab} + \frac{a \cdot \Delta b}{ab} + \frac{\Delta a \cdot \Delta b}{ab} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta a \cdot \Delta b}{ab}\,.$$

*Siis

(4)
$$\boldsymbol{\frac{\Delta(ab)}{ab} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta a \cdot \Delta b}{ab}}\,.$$

*Jos a:n ja b:n suhteelliset virheet ovat esim. 2 % ja 3 %, saadaan yhtälöstä (4) tulon ab suhteelliseksi virheeksi

$$\begin{aligned}2\,\% + 3\,\% + 2\,\% \cdot 3\,\% &= 0{,}02 + 0{,}03 + 0{,}02 \cdot 0{,}03 \\ &= 0{,}02 + 0{,}03 + 0{,}0006 \\ &\approx 0{,}05 = 5\,\%.\end{aligned}$$

*Tämä osoittaa sen, että viimeinen termi yhtälössä (4) on käytännössä mitättömän pieni kahteen muuhun verrattuna (jos tekijöiden virheet ovat aika pieniä, vain muutamia prosentteja). Siis:

Lause 4 *Tulon suhteellinen virhe on likimain tekijöiden suhteellisten virheiden summa (jos tekijöiden suhteelliset virheet ovat aika pieniä):*

$$\frac{\boldsymbol{\Delta(ab)}}{\boldsymbol{ab}} \approx \frac{\boldsymbol{\Delta a}}{\boldsymbol{a}} + \frac{\boldsymbol{\Delta b}}{\boldsymbol{b}}\ .$$

*Jos ei tiedetä, ovatko a:n ja b:n virheet positiivisia vai negatiivisia, on käytettävä itseisarvoja:

$$\boxed{\left|\frac{\boldsymbol{\Delta(ab)}}{\boldsymbol{ab}}\right| \le \left|\frac{\boldsymbol{\Delta a}}{\boldsymbol{a}}\right| + \left|\frac{\boldsymbol{\Delta b}}{\boldsymbol{b}}\right|}.$$

Esim. 8 $a \approx 2{,}76, \quad b \approx 3{,}14 \quad \therefore |\Delta a| \le 0{,}005, \quad |\Delta b| \le 0{,}005$

$$\left|\frac{\Delta(ab)}{ab}\right| \le \frac{0{,}005}{2{,}76} + \frac{0{,}005}{3{,}14} = 0{,}0034... \quad \Big|\cdot ab = 8{,}6664$$

$$|\Delta(ab)| \le 0{,}029... < 0{,}03$$

Siis $\underline{\underline{ab = 8{,}67 \pm 0{,}03}}.$

Virheraja ilmoitettiin yhden numeron tarkkuudella: 0,03 ja likiarvo katkaistiin samasta kohdasta, sadasosien jäljestä. *Olisi väärin ilmoittaa tuhannesosat, koska jo sadasosissa voi olla kolmen numeron heitto.*

Yleisesti tulon <u>suhteellinen virhe</u> on samaa suuruusluokkaa kuin tekijöiden: jos kummassakin tekijässä on esim. 1 % virhettä, niin tulossa on 2 % virhettä. Tämä merkitsee nyrkkisääntönä, että *tulossa on virhettä yhtä monennessa numerossa kuin tekijöissä.* Esimerkiksi edellisessä esimerkissä lähtöarvot olivat annetut 3 numeron tarkkuudella ja lopputuloskin esitettiin 3 numeron tarkkuudella (vaikkakin tuloksen viimeisessä numerossa saattoi olla kolme numeroa heittoa puoleen tai toiseen).

***Osamäärän virhe**:*

$$\frac{\Delta(a/b)}{a/b} \approx \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b} \quad \text{ja} \quad \left|\frac{\Delta(a/b)}{a/b}\right| \le \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta b}{b}\right| \quad \text{(+ eikä –)}$$

Potenssin virhe:

$$\left|\frac{\Delta(a^n)}{a^n}\right| \le n \cdot \left|\frac{\Delta a}{a}\right|.$$

Esim. 9 a) Johda z:lle virhekaava ja b) laske siitä z virherajoineen:

$$z = \frac{a^2}{bc} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} a \approx 2{,}36 \\ b \approx 4{,}41 \\ c \approx 1{,}22 \end{cases}.$$

*a) $\left|\frac{\Delta z}{z}\right| \le \left|\frac{\Delta a^2}{a^2}\right| + \left|\frac{\Delta(bc)}{bc}\right| \le 2 \cdot \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta b}{b}\right| + \left|\frac{\Delta c}{c}\right|.$

*b) $z = 1{,}0352...$

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| \le 2 \cdot \frac{0{,}005}{2{,}36} + \frac{0{,}005}{4{,}41} + \frac{0{,}005}{1{,}22} = 0{,}0094... \quad \Big| \cdot |z| = 1{,}0352...$$

$$|\Delta z| \le 0{,}0094... \cdot 1{,}0352... = 0{,}0098... < 0{,}01.$$

$$\therefore z = 1{,}04 \pm 0{,}01.$$

Toinen tapa arvioida z:n virhettä on se, että **lasketaan *z*:n *ylä-* ja *alalikiarvot***:

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{a^2}{bc} \le \frac{2{,}365^2}{4{,}405 \cdot 1{,}215} = 1{,}045... \\ z &= \frac{a^2}{bc} \ge \frac{2{,}355^2}{4{,}415 \cdot 1{,}225} = 1{,}025... \end{aligned}\right\} \therefore 1{,}025... \le z \le 1{,}045...$$

Sopiva z:n arvo on tämän z:lle saadun välin keskikohta:

$$z = \frac{1{,}025... + 1{,}045...}{2} = 1{,}035...$$

Oikea z:n arvo voi poiketa tästä korkeintaan koko välin puolikkaan verran puoleen tai toiseen, joten

$$|\Delta z| \le \frac{1{,}045... - 1{,}025...}{2} = 0{,}0092... < 0{,}01.$$

$$\therefore z = 1{,}04 \pm 0{,}01.$$

Tässäkin tehtävässä lähtöarvot oli annettu 3 numeron tarkkuudella ja tulos ilmoitettiin 3 numerolla. Yleisesti saadaan seuraava ***nyrkkisääntö***:

Tulo-osamäärä-potenssilausekkeissa lopputulos voidaan yleensä ilmoittaa yhtä monen numeron tarkkuudella kuin epätarkimmassa likiarvossa on merkitseviä numeroita.

Välitulokset on kuitenkin syytä kirjoittaa näkyviin yhdellä ylimääräisellä numerolla (ei seitsemällä ylimääräisellä!!) ja tallentaa laskimen muisteihin.

Esim. 10 1) $0{,}0936\ m \cdot 2{,}7182\ m = 0{,}2544...m^2 \approx 0{,}254\ m^2$. Huomaa, että 0,0936 *m* on esitetty 3 numeron eikä viiden numeron tarkkuudella. Desimaaliluvun edessä olevat nollat saadaan pois 10:n potenssien avulla: $93{,}6 \cdot 10^{-3}\ m$ – tai tässä myös yksikkömuunnoksella: 93,6 *mm*.

2) $\dfrac{9{,}30 \cdot 2{,}465}{3{,}923^2} = 1{,}489... \approx 1{,}49$. *Huomaa, että luvussa 9,30 on 3 numeron eikä kahden numeron tarkkuus.*

Esim. 11 Seuraavassa esimerkissä on mukana myös vähennyslasku. Koska vähennettävä ja vähentäjä ovat samaa suuruusluokkaa, numeroita "katoaa":

Onton pyöreän putken ulko- ja sisähalkaisijat ovat 24,52 *mm* ja 24,38 *mm*. Poikkipinta-ala on

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4}\cdot(24{,}52^2 - 24{,}38^2)\ mm^2 &= \frac{\pi}{4}\cdot(601{,}23...-594{,}38...)\ mm^2 \\ &= \frac{\pi}{4}\cdot 6{,}84...\ mm^2 \\ &= 5{,}37...\ mm^2 \\ &\approx 5{,}4\ mm^2.\end{aligned}$$

Jokaiseen välitulokseen on merkitty yksi ylimääräinen numero näkyviin ja välitulokset on tallennettu muisteihin. Lopputulos saadaan vain kahdella numerolla!

*Esimerkissä 9 arvioitiin tulo-osamäärälauseketta kahdella tavalla. Jos arvioitava lauseke on esim. muotoa $z = \dfrac{a}{a-b}$, niin ylä- ja alalikiarvon käyttäminen (suoraan tähän muotoon) antaa yleensä turhan suuren arvon z:n virhetermille, koska esim. ylälikiarvoa laskettaessa osoittajassa a:lle

täytyy valita mahdollisimman suuri ja nimittäjässä mahdollisimman pieni arvo. Samoin voi käydä, jos virhekaava muodostetaan itseisarvojen avulla seuraavasti:

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| \le \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta(a-b)}{a-b}\right| \le \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \frac{|\Delta(a-b)|}{|a-b|} \le \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \frac{|\Delta a| + |\Delta b|}{|a-b|}.$$

*Jos esimerkiksi $a = 9{,}5 \pm 0{,}2$ ja $b = 4{,}5 \pm 0{,}1$, niin tästä saadaan z:lle arvio $z = 1{,}90 \pm 0{,}16$ (tai $1{,}9 \pm 2$). Ylä- ja alalikiarvot antaisivat saman arvion $z = 1{,}90 \pm 0{,}16$ (tai $1{,}9 \pm 2$).

*Jos laskut suoritetaan ilman itseisarvoja mahdollisimman pitkälle, saadaan yleensä pienempi virhetermi, koska osa termeistä voi kumoutua:

$$\frac{\Delta z}{z} \approx \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta(a-b)}{a-b} = \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta a - \Delta b}{a-b} = \frac{\Delta a \cdot (a-b) - (\Delta a - \Delta b) \cdot a}{a(a-b)}$$

$$= \frac{\Delta a \cdot a - \Delta a \cdot b - \Delta a \cdot a + \Delta b \cdot a}{a(a-b)} = \frac{-b \cdot \Delta a + a \cdot \Delta b}{a(a-b)} \quad \Big| \cdot z = \frac{a}{a-b}$$

$$\Delta z \approx \frac{-b}{(a-b)^2} \cdot \Delta a + \frac{a}{(a-b)^2} \cdot \Delta b$$

$$|\Delta z| \le \frac{|b|}{(a-b)^2} \cdot |\Delta a| + \frac{|a|}{(a-b)^2} \cdot |\Delta b| = \frac{|b| \cdot |\Delta a| + |a| \cdot |\Delta b|}{(a-b)^2}$$

*Tässä esimerkissä tämä virhelauseke (joka on sama kuin kokonaisdifferentiaalin avulla saatava) antaa puolta pienemmän virhetermin ts. tuloksen $z = 1{,}90 \pm 0{,}08$.

Harjoituksia

A, B

7.1 a) Jos $a = 9{,}5 \pm 0{,}2$ ja $b = 4{,}5 \pm 0{,}1$, niin mitkä ovat a:n ylä- ja alalikiarvot. b) Laske lausekkeen $z = \dfrac{a}{a-b}$ ylälikiarvo 3 numeron tarkkuudella ja alalikiarvo 4 numeron tarkkuudella (huomaa pyöristys ylös- ja alaspäin).

7.2 Kuten edellinen, mutta $a \approx 9{,}5$ ja $b \approx 4{,}5$ (katkaistut likiarvot).

7.3 a) Kirjoita a:n ja b:n arvovälit kaksoisepäyhtälöinä, kun $a = 233 \pm 4$ ja $b = 71 \pm 3$. b) Millä väleillä luvut $a + b$ ja $a - b$ ovat. c) Mitä voit sanoa a:n suhteellisen virheen suuruudesta?

7.4 Laske $x - 3y$ virherajoineen, kun $x \approx 11{,}3$ ja $y \approx 23{,}1$.

7.5 Laske kahdella oleellisesti erilaisella tavalla (vrt. Esim. 9, josta ainakin toinen tapa on syytä osata) A virherajoineen, kun

$$A = \frac{\pi \cdot r^5}{ha^2}, \text{ missä } \begin{cases} \mathrm{r} = 2{,}440 \pm 0{,}003 \\ \mathrm{h} = 0{,}980 \pm 0{,}007 \\ a = 3{,}440 \pm 0{,}004 \end{cases}.$$

7.6 Laske seuraavien likiarvojen summa ja tulo: a) 1,74 ja 15,7 b) 25 ja $23{,}4 \cdot 10^3$, c) 25 ja $23{,}40 \cdot 10^3$, d) 0,056 ja 225,72.

7.7 Lieriön muotoisen kappaleen korkeus $h = (67{,}4 \pm 0{,}1)$ mm, pohjan halkaisija $d = (48{,}4 \pm 0{,}1)$ mm ja massa $m = (968{,}5 \pm 0{,}1)$ g. Laske tiheys ρ virherajoineen.

7.8 Teräslangan kimmovakion E määrittämiseksi yhtälöstä

$$E = \frac{F \cdot l}{\pi \cdot (d/2)^2 \cdot \delta}$$

mitattiin langan pituus $l = (2473 \pm 3)$ mm, langan halkaisija $d = (0{,}292 \pm 0{,}001)$ mm sekä voimaa $F = (10{,}00 \pm 0{,}05)$ N käyttäen pituuden muutos $\delta = (1{,}750 \pm 0{,}005)$ mm. Laske E virherajoineen.

7.9 Laske lausekkeen $z = \dfrac{2a^2}{b - c}$ arvo virherajoineen yhdellä tavalla tai *kahdella oleellisesti erilaisella tavalla, kun $a = 21{,}3 \pm 0{,}2$ $b = 4{,}15 \pm 0{,}03$ ja $c = 2{,}06 \pm 0{,}02$.

7.10 *Johda u:n suhteelliselle virheelle $\left|\dfrac{\Delta u}{u}\right| \leq \ldots$ laskukaava ja laske sen avulla u virherajoineen, kun

$$u = \frac{x + y}{x \cdot z^3}, \text{ missä } \begin{cases} x = 4{,}92 \pm 0{,}04 \\ y = 2{,}31 \pm 0{,}03 \\ z = 0{,}325 \pm 0{,}002 \end{cases}.$$

8 Boolen algebra ja joukko-operaatiot

8.1 Logiikan symboleja

Eräitä logiikasta peräisin olevia symboleja käytetään lyhentämään ja sopivassa määrin käytettynä myös selventämään matemaattista esitystä. Osaa näistä on silloin tällöin käytetty edelläkin, mutta seuraavassa luetellaan niitä hiukan systemaattisemmin.

1) **Implikaationuolta** $\Rightarrow$ käytetään merkityksessä "***jos ... niin***", esim.

a) $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$, b) $a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2$.

Implikaationuolta käytetään joskus (hiukan virheellisesti) merkityksessä "siitä seuraa". Esimerkiksi sanonta "Lauseesta 1 seuraa, että ..." voidaan kirjoittaa lyhyesti

$$\text{Lause 1} \Rightarrow \dots .$$

2) **Ekvivalenssinuolta** $\Leftrightarrow$ käytetään merkityksessä ***"yhtäpitävä", "ekvivalentti", "samanarvoinen", "jos ja vain jos" (epävirallinen lyh. joss), "silloin ja vain silloin, kun" (lyh. sjvsk)***. Esimerkiksi

$$a > b \Leftrightarrow a + c > b + c .$$

Tämä käsittää kaksi ehtoa: Jos $a > b$, niin $a + c > b + c$ ja myös kääntäen: jos $a + c > b + c$, niin $a > b$. Ilman symboleja sanottuna: epäyhtälön kumpaankin puoleen voidaan lisätä tai niistä poistaa sama luku.

3) **Kolmoispistettä** $\therefore$ käytetään päättelyn lopussa *johtopäätösmerkkinä* merkityksessä ***"siis", "siten", "täten"***. Nuolten ja siis-merkin eroa kuvaa seuraavan yhtälön ratkaiseminen reaalilukualueella.

$(x+2)^2 = 4x - 5 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 4x - 5 \Leftrightarrow x^2 = -9 \therefore$ ei ratk. (R:ssä).

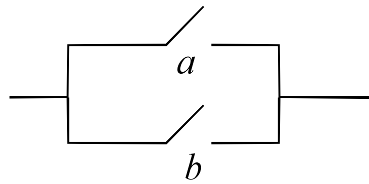
4) **Disjunktiomerkkiä** $\vee$ käytetään merkityksessä ***"tai"***. Tässä "tai" sisältää mahdollisuuden *"tai molemmat"*. Esimerkkejä:

a) $a = 0 \vee b = 0 \Rightarrow ab = 0$ (ts. jos a tai b tai molemmat ovat nollia, niin niiden tulokin on nolla),

b) $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ (tulon nollasääntö),

c) $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$ (eli $x = \pm 3$).

Tekniikassa esiintyy myös *mahdollisuuden "tai molemmat" poissulkeva "tai"* (engl. Exclusive OR). Edellä c)-esimerkissä on oikeastaan tällainen "tai", sillä x ei voi yhtäaikaa olla molempia, sekä 3 että –3.



Viereinen kuva esittää kahden katkaisijan kytkemistä rinnakkain virtajohtimeen. Sanonnassa "virta kulkee, jos a tai b on kiinni" on mukana mahdollisuus "tai molemmat". Sen sijaan sanonnassa "virta kulkee, vaikka a tai b on auki" (kunhan eivät molemmat ole auki) on mahdollisuus "tai molemmat" suljettava pois.

5) ***Konjunktiomerkkiä*** $\wedge$ käytetään merkityksessä ***"ja"***, esim.

$$a > 0 \wedge b > 0 \;\Rightarrow\; ab > 0\,.$$

Joskus matemaattinen esitys tulee selvemmäksi, kun disjunktio- ja konjunktiomerkkien sijaan kirjoitetaan "tai" sekä "," (pilkku), vrt. esim. seuraavat kolme esitystapaa:

$$ab > 0 \;\Leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$$

$$ab > 0 \;\Leftrightarrow a, b > 0 \;\text{ tai }\; a, b < 0$$

$ab > 0 \;\Leftrightarrow\;$ a ja b ovat samanmerkkisiä.

6) ***Negaatiomerkkiä*** $\neg$ käytetään merkityksessä ***"ei"***, ***"vastakohta"***. Esimerkiksi ehdon $x > 0$ negaatio on $x \le 0$, ts.

$$\neg(x > 0) \;= (x \le 0)\,.$$

(Yhtäläisyysmerkin sijasta käytetään tässä yhteydessä muitakin merkkejä mm. merkkejä $\equiv$ ja $\Leftrightarrow$.)

Esim. 1 Kahdesta ehdosta yhdistetyn ehdon $(a < 0) \wedge (b < 0)$ negaatio on $(a \ge 0) \vee (b \ge 0)$, ts.

$$\neg\left[(a < 0) \wedge (b < 0)\right] = (a \ge 0) \vee (b \ge 0)\,.$$

Perustelu: Vastakohta sille, että a ja b ovat molemman < 0, on se, että ainakin toinen näistä luvuista on ≥ 0, ts. että a tai b tai molemmat ovat ≥ 0.

8.2 Boolen algebraa

Logiikan lauseet *p*, *q*, ... ovat sellaisia, että ne voivat saada vain arvon ***tosi*** (*T*) tai ***epätosi*** (*E*), esim.



p: "virta kulkee kohdassa *A*"

q: "virta kulkee kohdassa *B*"

r: "$0 < a < 3$"

s: "$x > 1$"

t: "tarkasteltava henkilö asuu Somerolla"

Logiikan lauseista voidaan tehdä yhdistettyjä lauseita logiikan operaatioilla, esim.

$p \wedge q$: "virta kulkee kohdassa *A* ja *B*".

Logiikan lauseiden ***totuusarvoja*** *T* (= tosi, engl. *True*) ja *E* (= epätosi, engl. *False*) *merkitään usein myös numeroilla* 1 (= tosi) *ja* 0 (= epätosi) ja itse lauseita sanotaan ***Boolen muuttujiksi***. Esimerkiksi edellä mainittu muuttuja *p* saa arvon 1 (tai *T*), jos virta kulkee kohdassa *A*. Mikäli virta ei kulje kohdassa *A*, niin $p = 0$. Muuttuja *s* taas saa arvon 0, jos luku *x* ei täytä ehtoa "$x > 1$" vaan on ≤ 1.

Edellisissä luvuissa on yleensä käsitelty "reaalimuuttujia" *a, b*, ..., jotka ovat voineet saada arvoikseen minkä reaaliluvun tahansa. Näistä on tehty algebrallinen laskusysteemi laskuoperaatioilla $+, -, \cdot, /$ ja reaalilukulausekkeita on käsitelty tämän systeemin laskulakien mukaisesti. Lait ovat tyypiltään olleet esim. seuraavanlaisia: 1) $a(b+c) = ab + ac$ (osittelulaki), 2) $\frac{a+b}{c} = \frac{1}{c}(a+b) = \frac{1}{c} \cdot a + \frac{1}{c} \cdot b = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ (ts. summa voidaan jakaa luvulla siten, että jokainen yhteenlaskettava jaetaan tällä luvulla).

Useilla tekniikan aloilla esiintyy kuitenkin muuttujia, jotka ovat tyypiltään kaksivaiheisia "kytkimiä": kytkin on kiinni tai auki, venttiili on suljettu tai auki, virta kulkee tai ei, prosessi on toiminnassa tai ei, robotti siirtää osaa vasemmalle tai oikealle (jos muut suunnat on suljettu pois), joku asuu Somerolla tai ei. Niinpä tällaisten *Tosi-Epätosi* -arvoisten *Boolen* muuttujien käsittely on joillakin aloilla tullut tärkeäksi.

Esim. tietokannasta voidaan hakea vaikkapa ne henkilöt, jotka asuvat Turussa ja siellä Yliopistonkadulla tai Kaskenkadulla. Tällainen ehto on tyypiltään yhdistetty ja muotoa $p \wedge (q \vee r)$.

Laskuoperaatioina Boolen muuttujilla $p, q, r, \ldots$ toimivat logiikan operaatiot $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow$ jne. Muuttujilla p ja q on vain kaksi arvoa T ja E ja operaatioiden vaikutukset näihin muuttujiin voidaan esittää seuraavina taulukkoina:

p	$\neg p$
T	E
E	T

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	E	T
E	T	T
E	E	E

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	E	E
E	T	E
E	E	E

Tämän mukaan, jos p on tosi, niin sen negaatio on epätosi ja päinvastoin: jos p on epätosi, sen negaatio on tosi. Edelleen $p \vee q$ ("*p* tai *q*") saa arvon T kolmessa tapauksessa neljästä. Sen sijaan $p \wedge q$ ("*p* ja *q*") on tosi vain kun molemmat operandit p ja q ovat tosia. Nämä taulukot muodostavat itse asiassa näiden kolmen operaation määritelmän.

***Esim. 2** Esimerkissä 1 oli kaksi ehtoa *p*: "$a < 0$" ja *q*: "$b < 0$", jotka voivat olla tosia tai epätosia. Näistä muodostettiin lauseke $p \wedge q$ ja perusteltiin sanallisesti, että tässä tapauksessa pitää paikkansa seuraava yhtälö:

$$\neg\left[(a<0)\wedge(b<0)\right]=(a\geq 0)\vee(b\geq 0).$$

Muuttujia p ja q käyttäen tämä yhtälö saa muodon

(1) $$\boldsymbol{\neg(p\wedge q)=(\neg p)\vee(\neg q)}.$$

Todistetaan, että tämä *Boolen algebran* yhtälö pitää yleisesti paikkansa. Se tapahtuu edellisten taulukkojen tapaisen ***totuusarvotaulukon*** avulla:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
T	***T***	T	***E***	E	E	***E***
T	***E***	E	***T***	E	T	***T***
E	***T***	E	***T***	T	E	***T***
E	***E***	E	***T***	T	T	***T***

Taulukosta näkyy, että kaavan (1) vasen puoli saa kaikilla (*p,q*)-yhdelmillä saman totuusarvon kuin oikea puoli, joten kaava (1) pitää paikkansa.

*Vastaavaan tapaan voidaan todistaa muitakin ***Boolen algebran*** kaavoja, esim. seuraavat:

$(2a)$	$p \vee q = q \vee p$	$(2b)$	$p \wedge q = q \wedge p$
$(3a)$	$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$(3b)$	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$(4a)$	$p \vee (\neg p) = T$ (aina tosi)	$(4b)$	$p \wedge (\neg p) = E$
$(5a)$	$p \vee E = p$	$(5b)$	$p \wedge T = p$
$(6a)$	$\neg (p \vee q) = (\neg p) \wedge (\neg q)$	$(6b)$	$\neg (p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q)$
(7)	$\neg (\neg p) = p$		

Esim. 3 Sievennä edellisten lakien avulla lauseke $p \vee [\neg (p \vee q)]$.

$$
\begin{aligned}
p \vee [\neg (p \vee q)] &= p \vee [(\neg p) \wedge (\neg q)] && (6a\text{:n mukaan}) \\
&= [p \vee (\neg p)] \wedge [p \vee (\neg q)] && (3a) \\
&= T \wedge [p \vee (\neg q)] && (4a) \\
&= p \vee (\neg q) && (2b \text{ ja } 5b)
\end{aligned}
$$

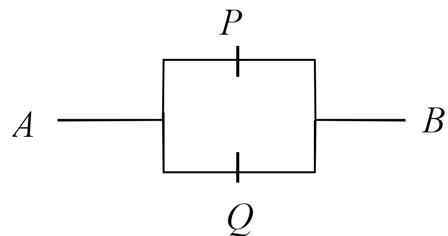
*Tämäntapaisella laskennalla on käyttöä mm. taulukkolaskennassa, sähkö- tai tietoliikennetekniikassa, hydrauliikassa, pneumatiikassa, ns. ohjelmoitavia logiikkoja käyttävissä systeemeissä jne.

Mm. virta- tai hydrauliikkapiirien yhteydessä operaatiomerkin $\vee$ ("tai") tilalla käytetään yleensä yhteenlaskumerkkiä + ja merkin $\wedge$ ("ja") tilalla kertomerkkiä $\cdot$. Samassa yhteydessä p:n negaatiota merkitään yläviivalla $\overline{p}$ ja T ja E -merkintöjen tilalla käytetään lukuja 1 ja 0. *Operaatiot* $\vee$ *ja* $\wedge$ *vastaavat rinnakkais- ja sarjakytkentää* seuraavasti:

Jos

p: "virta (tai virtaus) kulkee kohdan *P* (katkaisijan, venttiilin tms.) läpi",

q: "virta (tai virtaus) kulkee kohdan *Q* läpi",





niin $p+q$: "virta kulkee välillä *AB* rinnakkaiskytkennässä" (vrt. kuva), sillä $p+q=1$ (tosi) jos ja vain jos p tai q tai molemmat ovat tosia. Vastaavasti $p \cdot q$: "virta kulkee välillä *CD* sarjakytkennässä", sillä $p \cdot q$ saa arvon 1 vain kun molemmat muuttujista p ja q saavat tämän arvon.

Merkintöjä +, · ja $\overline{p}$ käyttäen esim. kaava $\neg(p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q)$

saa muodon $\overline{p \cdot q} = \overline{p} + \overline{q}$. *Kirjoita edellä esitetyt operaatioiden* $\neg$, $\vee$ *ja* $\wedge$ *totuusarvotaulukot sekä laskulait merkintöjä* +, · , ¯ , *0 ja 1 käyttäen!*

8.3 Joukkoalgebraa

Jos esim. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, niin merkintä $3 \in A$ tarkoittaa, että alkio 3 tai tässä tapauksessa luku 3 kuuluu joukkoon *A*. Joukoille voidaan määritellä laskutoimituksia, joiden avulla annetuista joukoista muodostetaan uusia. Ennen märittelyä mainitaan jo 1. osassa käytetty merkintä

$$\{x \mid p, q\},$$

mikä tarkoittaa niiden alkioiden *x* joukkoa, jotka täyttävät ehdot *p* ja *q*. Ehtoja voi olla useampiakin. Pilkun ("ja"-operaation) sijalla voi olla myös "tai" (*x* täyttää ehdno *p* tai *q*). Tyhjän joukon merkki on $\varnothing$ tai $\{\}$.

Esim. 3 a) Jos **N** on luonnollisten lukujen 1, 2, ... joukko, niin

$$\{x \mid x \in \mathbf{N}, x < 5\} = \{x \in \mathbf{N} \mid x < 5\} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

b) Joukko

$$\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}, x^2 + y^2 = 1\} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

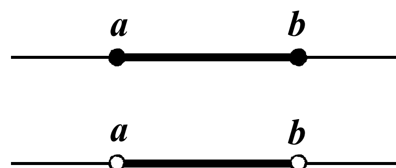
on *xy*-tason yksikköympyrä. Tämän koukeroisen esityksen sijaan puhutaan yksinkertaisesti ympyrästä $x^2 + y^2 = 1$.

c) ***Suljettu väli:***

$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x \le b\}$.

Avoin väli:

$]a, b[= \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$.



Suljettuun väliin kuuluvat siis välin päätepisteet, mutta avoimeen eivät.

Seuraavassa *A* ja *B* ovat jonkin perusjoukon *E* ***osajoukkoja***, ts. ne muodostuvat osasta tai ehkä kaikistakin *E*:n alkioista. Osajoukon merkki on $\subseteq$ (tai $\subset$). Siis

$$A \subseteq E, \; B \subseteq E.$$

Määritellään nyt muutamia joukkojen "laskutoimituksia" eli joukko-operaatioita.

Määritelmä:

yhdiste (unioni)	$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$	("A unioni B")
leikkaus	$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$	("A leikkaus B")
erotus	$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$	("A miinus B")
komplementti	$A^c = \{x \in E \mid x \notin A\}$	("A:n komplementti")
tulo	$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$	("A risti B")

Unioni muodostuu siis niistä alkioista, jotka kuuluvat A:han, B:hen tai molempiin. ***Leikkaus*** muodostuu A:n ja B:n yhteisistä alkioista. ***Erotusjoukko*** $A \setminus B$ saadaan poistamalla A:sta ne alkiot jotka kuuluvat B:hen. ***Komplementti*** A^c muodostuu niistä (perusjoukon) alkioista jotka eivät kuulu A:han. Se on siis tavallaan joukon A vastakohta, negaatio. Siitä käytetään yleisesti myös yläviivamerkintää $\overline{A}$.

Esim. 4 Jos $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{5, 6\}$ ja $B = \{2, 4, 6\}$, niin

$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{6\}$,

$A \setminus B = \{5\}$, $A^c = \{1, 2, 3, 4\}$ ja

$A \times B = \{(5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$.

*Joukko-operaatiot $\cup$, $\cap$ ja ^{c} noudattavat samoja *Boolen* algebran lakeja kuin logiikan operaatiot $\vee$, $\wedge$ ja $\neg$. Lakien perustelut ovat kuitenkin jonkin verran erityyppisiä, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

***Esim. 5** Todista, että erotusjoukko voidaan esittää leikkauksen ja komplementin avulla muodossa

$$A \setminus B = A \cap B^c.$$

Todistus:

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A, x \notin B \Leftrightarrow x \in A, x \in B^c \Leftrightarrow x \in A \cap B^c.$$

Harjoituksia

A

8.1 Kirjoita logiikan symboleja käyttäen seuraavat väitteet, joissa luvut tarkoittavat reaalilukuja. Tutki myös, mitkä väitteistä pitävät paikkansa ja esitä kielteisessä tapauksessa vastaesimerkki:

a) Jos a ja b ovat ei-negatiivisia ja $a < b$, niin $a^2 < b^2$.

b) Yhtälön $(x+2)^2 = x^2 - 1$ ainoa juuri on $x = -5/4$.

c) Yhtälön $x^2 = 16$ juuret ovat $x = 4$ ja $x = -4$.

8.2 Mikä on seuraavan ehdon negaatio:

a) $(x < 3) \vee (x > 5)$, b) $(x = 0) \vee (x > 2)$.

8.3 Kirjoita logiikan operaatioiden +, · ja ¯ totuusarvotaulukot.

8.4 Mikä on suljettujen välien $[-1, 5]$ ja $[2, 7]$ unioni ja leikkaus?

8.5 Laske joukkojen $A = \{2, 4, 6, ...\}$ ja $B = \{1, 3, 5, ...\}$ unioni, leikkaus, erotus ja komplementit, perusjoukkona $\mathbf{N}$.

8.6 Jos joukossa A on 13 alkiota ja joukossa B on 21 alkiota, niin kuinka monesta alkioparista joukko $A \times B$ muodostuu.

B

8.7 Kirjoita Boolen algebran kaavat a) $p \wedge (p \vee q) = p$,

b) $\neg(p \vee q) = (\neg p) \wedge (\neg q)$, c) $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

operaatioiden +, · ja ¯ avulla *sekä todista ne totuusarvotaulukoiden avulla.

8.8 *Todista kaava $p \wedge (p \vee q) = p$ sieventämällä vp. lauseketta laskulakien (1), (2*a*), ... avulla.

8.9 Luettele joukon $\left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbf{N}, a < 5, b \in \mathbf{N}, b \leq 3 \right\}$ alkiot.

8.10 *Todista seuraavat joukko-opin kaavat: a) $B^{\mathbf{c}} \setminus A^{\mathbf{c}} = A \setminus B$,

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (vrt. Esim. 5)

8.11 Tehtailla A ja B on $n(A) = 77$ ja $n(B) = 90$ alihankkijaa, joista yhteisiä on n. 34 %. Montako alihankkijaa on yhteensä? (Ohje: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$. Miksi ja miten tämä kaava sopii tähän tehtävään?)

9 Lukujono ja sarja

9.1 Lukujono

Lukujonossa on äärellinen tai ääretön määrä ***jäseniä*** yleensä pilkuilla erotettuina:

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots\ .$$

Esim. 1 a) Parittomien luonnollisten lukujen muodostama jono on päättymätön: 1, 3, 5, ... , $2n-1$, ... Tässä jonossa ***yleinen eli n:s*** jäsen on

$$u_n = 2n-1.$$

Mitä pidemmälle jonossa mennään, sitä suuremmaksi luvut tulevat. Tämä voidaan ilmaista "lähenemismerkkiä" $\to$ käyttäen seuraavasti: $u_n = 2n-1 \to \infty$, kun $n \to \infty$.

b) Jonossa $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots.$ taas $u_n = \frac{1}{n} \to 0$, kun $n \to \infty$. Tässä tapauksessa sanotaan, että tämän ***jonon raja-arvo*** on 0 (engl. limit of sequence).

c) Jonolla $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ ei ole mitään raja-arvoa, sillä jonon yleinen jäsen u_n saa n:n kasvaessa vuorotellen arvon 1 ja –1 eikä siis lähene mitään yksittäistä lukuarvoa. Tämän jonon yleinen jäsen voidaan esittää muodossa $u_n = (-1)^{n+1}$.

d) Sellaisen jonon, jossa $u_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$, alkupää näyttää seuraavalta: $1, 2\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, 2\frac{1}{4}, \ldots$. Tämän jonon raja-arvo on 2 sillä $\dfrac{(-1)^n}{n} \to 0$, kun $n \to \infty$ ja siten $u_n \to 2$, kun $n \to \infty$.

9.2 Aritmeettinen ja geometrinen jono

Aritmeettisessa jonossa *kahden peräkkäisen jäsenen* *__erotus__* *d* (*difference*) *on aina sama* $\boxed{u_{n+1} - u_n = d}$, esim.

$$1, 3, 5, 7, 9, \ldots\ (\mathrm{d}=2) \qquad 4, 1, -2, -5, \ldots\ (d=-3).$$

Aritmeettisen jonon yleinen muoto on

$$\boxed{a, a+d, a+2d, ..., a+(n-1)d, ...}$$

Geometrisessa jonossa taas *kahden peräkkäisen jäsenen* <u>suhde</u> *q* (*quotient*) *on aina sama:* $\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} = q}$. Voidaan myös sanoa, että seuraava jäsen saadaan edellisestä aina samalla luvulla *q* kertomalla: $u_{n+1} = q \cdot u_n$.

Täten geometrisen jonon yleinen muoto on

$$\boxed{a, aq, aq^2, aq^3, \dots, aq^{n-1}, \dots}$$

Jos esim. $q = 1{,}25$, niin geometrisessa jonossa aina seuraava jäsen on 1,25-kertainen eli 25 % suurempi sitä edeltävään verrattuna. Jos taas $q = 0{,}85$, niin prosentuaalin muutos jäsenestä seuraavaan on = 15 %:n pienennys. Yleisesti: ***geometrisessa jonossa prosentuaalinen muutos jäsenestä seuraavaan on aina yhtä suuri***. Tämä ominaisuus tekee geometrisen jonon käyttökelpoiseksi useissa teknisissä sovelluksissa, mm. valittaessa välikokoja putkille, pyörötangoille, pulteille, hammaspyörille, hihnapyörille jne.

Esim. 2 a) Jos putkille, joiden halkaisijat ovat 20 *mm* ja 120 *mm*, tehdään 3 välikokoa ***aritmeettisesti porrastaen***, saadaan jono

$$20,\ 20+d,\ 20+2d,\ 20+3d,\ 20+4d = 120 \quad \therefore d = 25.$$

Täten putkien halkaisijat ovat 20, 45, 70, 95, 120 (*mm*).

Ensimmäisestä koosta (20) toiseen (45) siirryttäessä halkaisija kasvaa yli kaksinkertaiseksi, tarkemmin sanoen kasvu on $\frac{45-20}{20} = 1{,}25 = 125\,\%$. Sen sijaan kahden viimeisen koon välillä kasvu on vain $\frac{120-95}{95} 0{,}2631... \approx 26{,}3\,\%$.

b) Jos välikoot tehdään ***geometrisesti porrastaen***, saadaan jono 20, $20q$, $20q^2$, $20q^3$, $20q^4 = 120 \quad \therefore q = \sqrt[4]{6} \approx 1{,}565$. Siis seuraava koko on aina 1,565-kertainen edeltävään nähden eli prosentuaalinen kasvu on jokaisen peräkkäisen koon välillä 56,5 % ja putkien halkaisijat ovat

20 31,3 49,0 76,7 120 (*mm*).

9.3 Sarja-käsite

Lasketaan päättymättömän lukujonon $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$ jäseniä yhteen yhä useampi ja useampi. Näin saadaan uusi jono

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \quad S_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4, \; ...$$

Jos jonolla $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ on äärellinen raja-arvo S, sanotaan, että ***sarja***

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{1}$$

suppenee (*konvergoi*) ja S on sarjan ***summa***. Muulloin taas sarja ***hajaantuu*** (*divergoi*). Yhteenlaskettavat ovat nimeltään sarjan ***termejä***.

Esim. 3 Jos kahden yksikön pituisesta janasta otetaan ensin puolet, siis 1 yksikkö, sitten puolet jäljellä olevasta osasta eli 1/2 yksikköä, sitten puolet jäljellä olevasta osasta eli 1/4 yksikköä jne., niin koko jana tulee käytettyä yhä tarkemmin ja tarkemmin, mutta ei koskaan aivan kokonaan. Osien pituuksista muodostuu (laskemalla ne yhteen) sarja

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... \tag{2}$$

Tämän sarjan ***osasummat*** muodostavat jonon

$$S_1 = 1, \; S_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}, \; S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}, \; S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1\frac{7}{8}, ...$$

Osasummien jonon $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ raja-arvo on = koko janan pituus eli 2 yksikköä. Näin ollen sarja (2) suppenee ja sen summa $S = 2$.

Edellinen sarja on eräs suppeneva ***geometrinen sarja***. Geometrisen sarjan yleinen muoto on

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + ... + aq^{n-1} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} \quad (a, q \neq 0). \tag{3}$$

Sarjassa (2) *ensimmäinen termi* $a = 1$ ja ***suhdeluku*** $q = \frac{1}{2}$.

Lause 1 ***Geometrinen sarja (3) suppenee jos ja vain jos*** $|q| < 1$.
Tällöin sarjan summa on

$$\boxed{S = \frac{a}{1-q}}.$$

Jos $q \neq 1$, *niin sarjan n:s osasumma*

$$\boxed{S_n = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}}.$$

**Todistus:* 1) Jos geometrisessa sarjassa (3) suhdeluku $q = 1$, niin sarja on vakioterminen $a + a + a + ... + a + ...$ ja se hajaantuu (+ tai – ääretöntä kohti sen mukaan, onko $a > 0$ vai $a < 0$).

2) Jos $q = -1$, sarja on $a - a + a - a + - ...$ ja siis hajaantuu (S_n saa vuorotellen arvon a ja 0 eli ei lähene mitään arvoa, kun $n \to \infty$).

3) Jos $q \neq 1$, niin n:s osasumma $S_n = a + aq + ... + aq^{n-1}$ on

$$\underline{\underline{S_n}} = a(1 + q + ... + q^{n-1}) = a \cdot \frac{(1-q)(1 + q + ... + q^{n-1})}{(1-q)} = \underline{\underline{a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}}},$$

sillä

$$\begin{aligned} &(1-q)(1 + q + q^2 + ... + q^{n-1}) \\ &= 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} - q - q^2 - ... - q^{n-1} - q^n \\ &= 1 - q^n \qquad \text{(termejä kumoutui parittain).} \end{aligned}$$

Tämän avulla suoritetaan seuraavien kahden kohdan päättelyt.

4) Jos $|q| < 1$, niin osasumman lausekkeesta $S_n = a \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$ nähdään, että S_n lähenee raja-arvoa $a \cdot \dfrac{1}{1-q}$, kun $n \to \infty$ (sillä $q^n \to 0$). Sarja siis suppenee ja sen summa on $\dfrac{a}{1-q}$.

5) Jos $|q| > 1$, niin samasta osasumman lausekkeesta näkyy, että sarja hajaantuu (sillä $|q|^n \to \infty$, kun $n \to \infty$).

Esim. 4 a) Sarja $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+....$ on geometrinen ($a=1, q=½$), joten se suppenee ja sen summa on $S=\frac{1}{1-½}=2$.

b) Tutki, millä x:n arvoilla seuraava sarja suppenee ja mikä on sen summa:

$$3+\frac{3x}{2}+\frac{3x^2}{4}+\frac{3x^3}{8}+\frac{3x^4}{16}+\dots .$$

Sarja on geometrinen, suhdelukuna $q=\frac{x}{2}$ ja ensimmäisenä terminä $a=3$. Sarja suppenee siis, kun

$$\left|\frac{x}{2}\right|<1 \Leftrightarrow |x|<2 \Leftrightarrow \underline{\underline{-2<x<2}}.$$

Tällöin sarjan summa $S=\frac{3}{1-\frac{x}{2}}=\frac{6}{2-x}$.

Juuri saatu tulos voidaan esittää myös seuraavassa muodossa: Jos $-2<x<2$, niin funktio $\frac{6}{2-x}$ voidaan esittää *x:n potenssien mukaan etenevänä sarjana*:

$$\frac{6}{2-x}=3+\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{8}x^3+\dots \qquad (-2<x<2)$$

Myöhemmin johdetaan derivointiin ja integrointiin perustuen mm. tavallisimmille "transsendenttifunktioille" e^x, $\sin x$, $\ln(1+x)$, … ***potenssisarjakehitelmiä***:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots \qquad \text{(voimassa kaikilla } x\text{:n arvoilla),}$$

(esim. $4!=1\cdot2\cdot3\cdot4$, lue ***"neljä kertoma"***),

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-+\dots \qquad \text{(voimassa kaikilla } x\text{:n arvoilla),}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-+\dots \qquad \text{(voimassa välillä } -1<x\le1\text{).}$$

Esim. 5 Kulman $x = 10° = \frac{\pi}{180} \cdot 10 = 0{,}1745...$ (rad) sinille saadaan hyvä likiarvo, kun $\sin x$:n sarja katkaistaan toisen termin jäljestä ja sarjan alkupäätä käytetään $\sin x$:n likiarvona:

$$\sin 10° \approx 0{,}1745... - \frac{0{,}1745...^3}{3!} = 0{,}173646...$$

(laskin antaa tuloksen $\sin 10° = 0{,}173648...$).

Aritmeettinen sarja

$$a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + ...$$

hajaantuu aina (sillä osasummien jonon raja-arvo on aina $\pm\infty$). Niinpä käytännön merkitystä on vain aritmeettisen sarjan osasummilla eli lyhyesti ***aritmeettisilla summilla***

(4) $$\boxed{S_n = a + (a+d) + (a+2d) + ... + u_n}.$$

Koska 2. termissä on lisäys $1 \cdot d$, 3. termissä on lisäys $2 \cdot d$ jne., niin n:nnessä termissä on lisäys $(n-1) \cdot d$, ts.

$$\boxed{u_n = a + (n-1) \cdot d}.$$

Lause 2 *Aritmeettisen summan* (4) *arvo on*

$$\boxed{S_n = n \cdot \frac{a + u_n}{2}},$$

ts. n kertaa ensimmäisen ja viimeisen termin keskiarvo.

**Todistus:* Lasketaan S_n kahdella tavalla (etu- ja takaperin):

$$+ \begin{cases} S_n = a + (a+d) + (a+2d) + ... + u_n \\ S_n = u_n + (u_n - d) + (u_n - 2d) + ... + a \end{cases}$$

$$2 \cdot S_n = (a + u_n) + (a + u_n) + (a + u_n) + ... + (a + u_n) = n \cdot (a + u_n)$$

$$\therefore S_n = \frac{n \cdot (a + u_n)}{2}.$$

Esim. 6 $1 + 3 + 5 + ... + 49 = 25 \cdot \frac{1 + 49}{2} = 25 \cdot 25$ (sillä luvuista 1, 2, ... 50 puolet eli 25 kpl on parittomia).

Harjoituksia

A, B

9.1 Kirjoita lukujonojen $u_1, u_2, \ldots$ viisi ensimmäistä jäsentä ja määritä jonojen raja-arvot, kun

a) $u_n = \dfrac{2n-1}{n^2+1}$, b) $u_n = \dfrac{3n-1}{n}$ c) $u_n = (-1)^n \cdot \dfrac{3n-1}{n}$.

9.2 Aritmeettisen jonon 4. jäsen on 35 ja 9. jäsen 80. Laske 5. ja 6. jäsen kahdella eri tavalla: a) Muodosta a:lle ja d:lle yhtälöpari. b) Käytä samaa ajattelutapaa kuin esimerkissä 2.

9.3 Kuten edellinen, mutta kyseessä on geometrinen jono.

9.4 Hammaspyörien hammasmäärät ovat 55 ja 22. Näiden välille tehdään kaksi välikokoa (geom. porrastus). Laske välikokojen hammasmäärät.

9.5 Väkiluku a kasvaa vuosittain 5 %. a) Millainen jono näistä luvuista muodostuu? b) Kuinka monen vuoden kuluttua väkiluku on kaksinkertaistunut?

9.6 Pankkiin tallennetaan 1. vuoden alussa 1000 euroa. Se kasvaa *korkoa korolle* siten, että joka vuoden lopussa maksetaan tallennetulle pääomalle 5 % korkoa ja korko lisätään pääomaan. a) Millaisen jonon pääomat muodostavat? b) Kuinka monen vuoden kuluttua tallennettuna oleva summa ylittää 2000 euroa?

9.7 Pankkiin tallennetaan 10 vuoden alussa joka kerta 1000 euroa. Kuinka suureksi pääoma on kasvanut 10 vuoden loppuun mennessä, kun korkoa maksetaan siten, että joka vuoden lopussa maksetaan pääomalle 5 % korkoa ja korko lisätään pääomaan?

9.8 Shakkilaudan 64 ruudulle ajatellaan asetetuksi sentin kolikoita siten, että 1. ruudulle tulee 1 sentti, 2. ruudulle 2 senttiä, 3. ruudulle 4 senttiä, 4. ruudulle 8 senttiä jne. Paljonko rahaa kuluu yhteensä?

9.9 Millä x:n arvoilla sarja $(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{4}(x-1)^3 + \ldots$ suppenee?

9.10 a) Kuinka monta termiä $\sin x$:n sarjasta on otettava, jotta $\sin 1°$:lle saatavassa likiarvossa olisi vielä viideskin desimaali oikein? b) Entä $\sin 30°$:lle saatavassa likiarvossa?

Vastauksia (Näissä saattaa olla virheitä)

Luku 1

1.1 a) 0, 2, –8, b) –1/2, $\pm\sqrt{2}$, c) –2, $3\pm\sqrt{6}$. Kokeiltavia arvoja ovat 6:n tekijät, siis $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ (sillä nimittäjä q = 1) **1.2** $\dfrac{x-3}{x^2+1}$
1.3 a) piirrä kuutioparaabeli ja suora $y = x+1$, b) ja c) 1,325
1.4 ±2 ja $\pm\sqrt{3}i$ **1.5** 2 ja $\approx 1{,}634$ **1.6** ½ ja $(-1\pm\sqrt{3})/2$
1.7 $\dfrac{2x^2+1}{2x-1}$ **1.8** 1,935 **1.9** 1,54 (1,535); iterointi toimisi huonosti
1.10 Jäljelle jää yhtälö $x^2+3=0$ **1.11** $a_1 = 0,\ a_2 = ½$ **1.12** $\beta \approx 1{,}03$ rad $\approx 59°$, joten $\alpha \approx 118°$ **1.13** $\dfrac{x+2}{x+1}$ **1.14** $\dfrac{10r^2+23r-5}{2r-1}$
1.15 iterointiyhtälönä on a) $x = \ln x + 2$, b) $x = e^{x-2}$

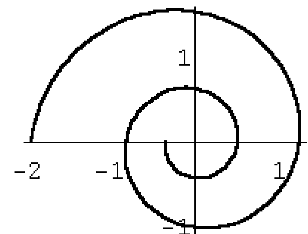
Luku 2

2.1 $y_1 = x_1^2$ **2.2** Paraabelin pisteitä saat konstruoitua esim. piirtämällä F-keskisiä ympyröitä, joiden säteet ovat vaikkapa 1, 2, 3, ... yksikköä ja suoria, jotka ovat näillä samoilla etäisyyksillä s:stä. Määritä lisäksi huipun paikka ja käytä symmetriaa. **2.3** Koska $p = 1/2a = 2$ ja kyseessä on origohuippuinen, ylöspäin aukeava paraabeli, niin $F = (0,1)$ ja s: $y = -1$ **2.4** $y = -x^2 - 6x - 5$ **2.5** $y = -\dfrac{3}{2}x^2$ **2.6** $a = 1/4$ ja yhtälö sievenee muotoon $y = \frac{1}{4}x^2 - x$ **2.7** a) perusparaabelin kokoinen, ylöspäin aukeava, huippu $(-2, 0)$, piirrä kuva, b) perusparaabelia pienempi, alaspäin aukeava, huippu $(1, 2)$, origon kautta kulkeva (koska vakiotermi on = 0), piirrä kuva, c) perusparaabelia pienempi, vasemmalle aukeava, huippu $(2, 1)$, origon kautta kulkeva, piirrä kuva
2.8 (2,–11) **2.9** (–2,1), $y_1 = 1/x_1$ **2.10** $x^2 + y^2 - 2xy - 4x - 4y + 4 = 0$ **2.11** a) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$, b) (2,1½)
2.12 a) $y = 3x^2 - x$, b) $x = y^2 - 3y + 2$ **2.13** huippu on (2,–3) **2.14** $x_0 = 1\pm\sqrt{5}$ ja $y_0 = 6\pm2\sqrt{5}$, missä ylemmät merkit vastaavat toisiaan
2.15 $x - 1 = \frac{1}{12}(y-2)^2$ **2.16** $q = -\dfrac{4h}{L^2}u^2 + \dfrac{4h}{L}u$ **2.17** $y = \dfrac{4h}{L^2}x^2$
2.18 $y = -x^2 + 2x$ **2.19** suora on $x = 1/8$

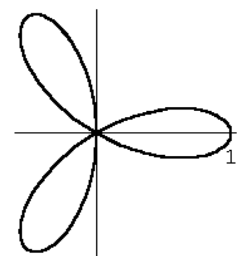
Luku 3

3.1 $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$ **3.2** a) (0, 1) ja 1, b) (–2, 5) ja 3 **3.3** $x^2 + y^2 - 7x - y = 0$ **3.4** b) PQ:n keskinormaali: $y = ½$, OP:n keskinormaali: $y + 1 = ½(x - ½)$, leikkauspiste: (3½,½), c) (3½,½) **3.5** $2x - y + 5 = 0$ **3.6** a) 5 ja 3, b) 1 ja 2 (siis "pystyellipsi") **3.7** a) $(\pm 4, 0)$, b) $(0, \pm\sqrt{3})$ **3.8** a) $y = 4/x$, b) $a = 2, b = 1$, c) $a = 1, b = 2$, d) edellisen liittohyperbeli **3.9** $x^2 - y^2 + 4x + 10y - 5 = 0$ **3.10** $2x + y = 12$ **3.11** $x^2 + y^2 + 28x + 14y = 20$ **3.12** $y = 2x \pm \sqrt{5}$ **3.13** $(-1, -1)$ **3.14** $-\frac{1}{3} \cdot 3 = -1$ **3.15** $x^2/41 + y^2/16 = 1$ **3.16** $(-2, 3)$, $a = 2,\ b = 1$ **3.17** $(x+2)^2/16 + (y-8)^2/25 = 1$ **3.18** 3/5 **3.19** a) hyperbeli, jolla $kp = (2, 0)$, $a = 2,\ b = \sqrt{2}$, b) "liittohyperbeli (y-suuntaan kaartuva hyperbeli), jolla $kp = (0, -1)$, $a = \sqrt{2}$ ja $b = 1$ **3.20** $3x - 4y \pm 10 = 0$ **3.21** suoria $y = \pm\frac{3}{2}x$, jotka ovat esim. hyperbelin $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ asymptootit **3.22** $a = 16$ **3.23** $kp = (-3, -1)$ ja $r = \sqrt{5}$ **3.24** $3x^2 + 3y^2 + 20x + 12 = 0$, siis eräs ympyrä **3.25** Ehto "P:n etäisyyden ympyrän kp:stä pitää olla < r" sievenee kyseiseksi epäyhtälöksi **3.26** $(-4/5, 12/5)$ **3.27** ellipsillä $c = 4$ ja hyperbeleillä $c = \sqrt{34} \approx 5{,}8$

Luku 4



4.1 a) $(-\sqrt{3}, 1)$, b) $(-2\sqrt{3}, -2)$, c) $(-0{,}43; 3{,}39)$ **4.2** a) $r = 2$, $\varphi = 5\pi/3$ tai yhtä hyvin $-\pi/3$, b) $r = \sqrt{2}, \varphi = 5\pi/4$, c) $r \approx 6{,}13$, $\varphi \approx 247{,}6°$ **4.3** kuva vieressä **4.4** B: $(2\sqrt{3}, -2)$, C: $(\sqrt{3} + 2, -1 + 2\sqrt{3})$ **4.5** a) $(3\sqrt{3}/2, -3/2)$, b) $(-3\sqrt{3}/2, -3/2)$, c) $\approx (1{,}62; -1{,}18)$ **4.6** a) $r = \sqrt{2}, \varphi = 7\pi/4$, b) $(2, 5\pi/6)$, c) $(8, 4\pi/3)$, d) $r = 5, \varphi \approx 143°$ **4.7** Kyseessä on ympyrä, jonka $kp = (3, 0)$ ja $r = 3$ **4.8** a) "2-lapainen propelli" , b) "kolmiapila" (kuva vieressä)



4.9 B: $(-2,-2\sqrt{3})$, C: $(-3/2+\sqrt{3},-1-3\sqrt{3}/2)$ **4.10** B: $(2\sqrt{3},2)$, C: $(\sqrt{3}-2,1+2\sqrt{3})$ **4.11** paraabeli, sillä $y_1{}^2$-termi häviää **4.12** $\alpha \approx 18{,}4°, a=6, b=2$, y_1-suuntaan kaartuva hyperbeli. Piirrä kuva. **4.13** $r=0{,}874\varphi$ **4.14** $k\approx 1{,}07$, $a\approx 0{,}343$ **4.15** a) "propelli", b) "3-apila", c) *kardioidi*, "sydänkäyrä", "lumpeenlehti", d) *suora* $y=2$, e) suora $\sqrt{3}x+y-4=0$, jonka etäisyys origosta on 2 ja normaalin vaihekulma on 30° **4.18** $(x-2+y)^2/8+\ +(x-2-y)^2/2=1$ eli $5x^2+5y^2-6xy-20x+12y+12=0$ **4.19** a) paraabeli (vas. aukeava) b) ei mikään käyrä ("ympyrä", jolla $r^2<0$, c) hyperbeli (y-suuntaan kaartuva), d) kaksi suoraa $x\pm 2y=0$ (hyperbelin $x^2/4-y^2/1=1$ asymptootit), e) piste $(0,0)$ **4.20** $F=(1,0)$, normaalin kulmakerroin on -1, ts. eräs normaalivektori on $\bar{n}=[1,-1]$. Laske kulmat vektorilaskennalla tai suorien välisinä kulmina.

Luku 5

5.1 a) 4,70 b) 2,46 **5.2** a) 1,17 b) –0.284 c) $\lg 3-3$ **5.3** a) e^2-1 b) 0,581 c) $1+\sqrt{11}$ **5.4** Tee etäisyyksille origosta taulukko

a	1 2 3 4 . . . 100
$A=100mm\cdot\lg a$	

5.5 Piirrä suora pisteiden $(0,2)$ ja $(10,89)$ kautta. **5.6** b) $\begin{cases} x=30\text{mm}\cdot\cos t \\ \text{y}=50\text{mm}\cdot\sin t\end{cases}$ tai lyhemmin $\begin{cases} x=30\cos t \\ \text{y}=50\sin t\end{cases}$ **5.7** a) 2,466 b) 2,52 **5.8** a) 7,70 b) 12,66 **5.9** n. 6,3 mrd (eräs arvio toteutuneesta väkiluvusta vuodelle 2000 on 6,1 mrd) **5.10** a) $k=0{,}0231\frac{1}{\text{min}}$, b) 90 min kuluttua alkuhetkestä **5.11** a) $\dfrac{\ln 3-\ln 5}{\ln 5-\ln 2}\approx -0{,}557$ b) $-\dfrac{\ln 3}{\ln 6}$ c) $\dfrac{\ln(2+\sqrt{5})}{\ln 2}\approx 2{,}08$ (muodosta 2^x:lle 2. asteen yhtälö), d) $\dfrac{3\ln 2-2\ln 3}{\ln 3}$ e) 0,11 **5.12** a) 3/2 (käy) b) ei ratkaisua ($x=½$ ei käy) c) $6+\sqrt{55}$ d) 3 (varo: $\dfrac{\ln a}{\ln b}\neq \ln a-\ln b$) **5.13** c) n. 9,2 d) n. 8,3 **5.14** $\dfrac{\ln 2-\ln 0{,}1}{0{,}35\cdot\ln 2{,}1+0{,}1}\approx 8{,}329$ **5.15** a) Eliminoi parametri **5.16** Ellipsi, $a=3$, $b=2$, $kp=(2,1)$ **5.18** $x^2/4-y^2/4=1$

Luku 6

6.1 a) $x < 4/5$ b) $x > 9/7$ **6.2** a) $x \geq 2$ b) $x < -3$ tai $x > 1/2$ **6.3** a) $x < 0$ tai $x > 1/2$ b) $3 < x \leq 7/2$ **6.4** a) $x < -3$ tai $x > 1$ b) $-2 < x < 1/3$ **6.5** a) $-3/2 < x < 3/2$ b) $x \geq 3/5$ tai $x \leq -3/5$ c) ei ratkaisuja (välien $x > -1/3$ ja $x < -1$ yhteiset arvot) d) $x > -1/3$ (välien $x > -1/3$ ja $x > -1$ yhteiset arvot) e) $x > 1$ tai $x < 1/3$ f) $x < 1$ (tai $x < 1/3$, mutta nämä ratkaisut sisältyvät kaikki ratkaisuun $x < 1$) **6.6** alaspäin aukeavan paraabelin ja suoran välinen alue (esitä kuvana) **6.7** a) $-2 < x < 0$ tai $x > 1$ b) $x < -\sqrt{2}$ tai $0 < x < \sqrt{2}$ **6.8** a) $x < -1/2$ tai $x > 1$ b) ei ratk. c) $x \neq -1/3$ (ts. $Rj = \mathbf{R} \setminus \{-1/3\}$) d) $x = -1/3$ e) identtinen ts. $Rj = \mathbf{R}$ **6.9** a) $-1/2 < x < 0$ tai $x > 1$ (käytä osoittajan merkkitarkastelussa paraabelia) b) $x < -1$ tai $1 < x < 2$ tai $x > 3$ **6.10** a) $x < 2/3$ (yhteiset x:t tästä ja ehdosta $x < 1$) b) $x \geq -4$ tai $x \leq -2/3$. Nämä käsittävät kaikki reaaliluvut, joten epäyhtälö on identtinen. c) $-1 < x < 2/3$ **6.11** a) $-1 < x < 2$ b) $x < 1/3$ tai $x > 1$ **6.12** ympyrälevy, jonka $kp = (0,2)$ ja $säde = 2$ **6.13** $x = 55$ kpl, $y = 45$ kpl, $voitto = 290\,000$ euroa **6.14** a) $y = 3x - 1$, kun $x \geq 1$ ja $y = x + 1$, kun $x < 1$ (vrt. monisteen 1. osa), b) $y = 2x - 1$, kun $x \geq 1$; $y = 1$, kun $0 \leq x < 1$ ja $y = -2x + 1$, kun $x < 0$ c) $y = x^2 - 4$ silloin kun $x^2 - 4 \geq 0$ eli väleillä $x \geq 2$ ja $x \leq -2$; $y = -x^2 + 4$ muulloin (piirrä kuva) **6.15** a) $x < -1$ tai $-1/2 < x < 1/2$ tai $x > 1$ b) $x < -1$ tai $5/2 < x < 5$ **6.16** $x < 3/2$ tai $x = 2$ **6.17** $-1 - 2\sqrt{2} < a < -1 + 2\sqrt{2}$ (diskr. < 0) **6.18** $x < -4$ **6.19** a) $1/3 < x < 1$ b) $x < -1/\sqrt{2}$ tai $x > 1/\sqrt{2}$, mutta ei $x = \pm\sqrt{3}$

Luku 7

7.1 a) 9,7 ja 9,3 b) $z \leq 2{,}063... < 2{,}07$ (pyöristys ylöspäin) c) $z \geq 1{,}7547... > 1{,}754$ (pyöristys alaspäin) **7.2** a) 9,55 ja 9,45 b) 1,95 c) 1,852 **7.3** a) $229 \leq a \leq 237$, $68 \leq b \leq 74$ b) $297 \leq a + b \leq 311$, $155 \leq a - b \leq 169$ c) $\left|\frac{\Delta a}{a}\right| \leq \frac{4}{233} < 2\,\%$, tarkemmin sanottuna: $\frac{-4}{237} \leq \frac{\Delta a}{a} \leq \frac{4}{229}$ **7.4** $-58{,}0 \pm 0{,}2$ **7.5** $23{,}4 \pm 0{,}4$ **7.6** a) 17,4 ja 27,3 b) 23400 ja 590 000 c) 23430 ja 590 000 d) 225,78 ja 13 **7.7** $(7{,}81 \pm 0{,}05) \cdot 10^3$ kg / m^3 **7.8** (211 ± 4) kN / mm^2 **7.9** 430 ± 20

7.10 karkea arvio: $\left|\frac{\Delta u}{u}\right| \le \frac{|\Delta x| + |\Delta y|}{|x+y|} + \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + 3 \cdot \left|\frac{\Delta z}{z}\right|$, $u = 43 \pm 2$,

*tarkempi arvio: $\left|\frac{\Delta u}{u}\right| \le \left|\frac{y}{x+y}\right| \cdot \left(\left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right|\right) + 3 \cdot \left|\frac{\Delta z}{z}\right|$, $u = 42{,}8 \pm 1{,}1$

Luku 8

8.1 a) $a \ge 0 \wedge b \ge 0 \wedge a < b \Rightarrow a^2 < b^2$ (pitää paikkansa). Sama lyhemmin: $0 \le a < b \Rightarrow a^2 < b^2$ b) $(x+2)^2 = x^2 - 1 \Leftrightarrow x = -5/4$ (pitää paikkansa) c) $x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -4$ (pitää paikkansa; huomaa "tai"- eikä "ja"-merkki) **8.2** a) $(x \ge 3) \wedge (x \le 5)$ eli lyhemmin $3 \le x \le 5$ b) $(x \ne 0) \wedge (x \le 2)$ eli selväkielisemmin: $x \le 2$, mutta $\ne 0$

8.3 Esim. negaation $\bar{\ }$ totuuasarvotaulukko on viereinen

p	$\bar{p}$
1	0
0	1

8.4 $[-1, 7]$ ja $[2, 5]$ **8.5** **N**, $\varnothing$, A, B, A **8.6** 273 parista **8.9** 1, 1/2, 1/3, 2, 2/3, ... (9 erilaista arvoa) **8.11** 124 (tai 125) alihankkijaa

Luku 9

9.1 Raja-arvot: a) 0, b) 3, c) ei raja-arvoa **9.2** 44 ja 53 **9.3** 41,3 ja 48,7 **9.4** 41 (tai 40) ja 30 ($q = \sqrt[3]{0{,}4}$) **9.5** a) geometrinen jono, $q = 1{,}05$ b) 15 vuoden kuluttua ($n \ge 14{,}2$) **9.6** Kuten edellinen vastaus **9.7** 13206,78 euroa **9.8** $2^{64} - 1$ senttiä **9.9** $-1 < x < 3$ **9.10** a) yksi b) kolme.